

A2

数 学

(2026 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = e^x \sin x$, $g(x) = e^x \cos x$ をそれぞれ微分せよ。

(2) 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{\pi} x e^x \sin x \, dx$$

2 1回まわすごとに、1, 2, 3, $\dots$, 10のうち、1つの数字を出すルーレット A, Bがある。この2つのルーレットでは、どの数字も出る確率は $\frac{1}{10}$ である。A と B を5回ずつまわし、出た数字に応じて、数列 $a_0, a_1, \dots, a_5$ と $b_0, b_1, \dots, b_5$ を次の条件 (i), (ii), (iii) により定める。

(i) $a_0 = 0, b_0 = 0$

(ii) $n = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して、A で n 回目に出た数字を A_n とすると、

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 2 & (A_n \text{ が } 5 \text{ の倍数でなく, } a_{n-1} \leq 3 \text{ であるとき}) \\ a_{n-1} + 1 & (A_n \text{ が } 5 \text{ の倍数であり, } a_{n-1} \leq 4 \text{ であるとき}) \\ a_{n-1} & (\text{それ以外するとき}) \end{cases}$$

(iii) $n = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して、B で n 回目に出た数字を B_n とすると、

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} + 2 & (B_n \text{ が奇数であり, } b_{n-1} \leq 3 \text{ であるとき}) \\ b_{n-1} + 1 & (B_n \text{ が偶数であり, } b_{n-1} \leq 4 \text{ であるとき}) \\ b_{n-1} & (\text{それ以外するとき}) \end{cases}$$

このとき、 $n = 3, 4, 5$ に対して、

p_n を、 $a_{n-1} < 5$ かつ $b_{n-1} < 5$ かつ $a_n = 5$ である確率、

q_n を、 $a_n < 5$ かつ $b_{n-1} < 5$ かつ $b_n = 5$ である確率

とする。

例えば、A で1回目から5回目までに出的数字が順に5, 3, 10, 1, 5のとき、 $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 4, a_5 = 5$ である。

次の問いに答えよ。

(1) A で1回目から5回目までに出的数字が順に5, 2, 4, 10, 1であり、B で1回目から5回目までに出的数字が順に7, 2, 4, 1, 5であるときの、 a_n, b_n ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) をそれぞれ求めよ。

(2) p_3, q_3 をそれぞれ求めよ。

(3) p_4, q_4 をそれぞれ求めよ。

(4) p_5, q_5 をそれぞれ求めよ。

3 O を原点とする xyz 空間に, 3 点 $A(3, 0, 5)$, $B(2, \sqrt{2}, 4)$, $C(3, 2\sqrt{2}, 1)$ を通る平面 α と, α に点 D で接し中心が点 $P(3, 0, 3)$ である球面 S がある。次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ を求めよ。

(2) D の座標, および S の半径 r をそれぞれ求めよ。

(3) 点 $Q(0, 0, 5)$ と, 平面 $z = 0$ 上の点 $R(X, Y, 0)$ を考える。直線 QR が S と共有点をもつような (X, Y) の範囲を求め, XY 平面上に図示せよ。

4 複素数 z が 0 でないとき, その極形式を

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{ただし, } r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi) \quad (*)$$

で表し, $f(z)$ を

$$f(z) = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) $(*)$ で表される複素数 z に対して, $\frac{f(z)}{z}$ の虚部を r と θ を用いて表せ。

(2) $f(7 + 6\sqrt{2}i)$ と $f(7 - 6\sqrt{2}i)$ をそれぞれ求めよ。

複素数 w が, 次の (a) かつ (b) をみたしながら動く。

(a) $0 < |w| \leq 1$

(b) w の偏角 α は, $\frac{3\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{4}$ の範囲にある。

(3) w^2 の動く範囲を求め, 複素数平面上に図示せよ。

(4) $f(w^2)$ の動く範囲を求め, 複素数平面上に図示せよ。

5 実数全体で定義された関数 $f(x) = 5 \log(x^2 + 1) + 3x$ に対して, xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。 C の変曲点のうち, x 座標が負であるものを $A(\alpha, f(\alpha))$ とし, A における C の接線を ℓ とする。

次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の増減, 極値, C の凹凸, 変曲点を調べ, C の概形を描け。
ただし, 自然対数の底 e に対して, $e < 3$ であることは証明せずに用いてよい。

(2) ℓ の方程式を求めよ。

(3) C , ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

