

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2025 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ ($0 < x < 2\pi$) に対して, xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。 $f(x)$ の増減, 極値, C の凹凸, 変曲点を調べ, C の概形を描け。
- (2) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_1^t \log \left(\frac{x+1}{x} \right) dx - \log t \right)$$

第 2 問

1 個のさいころを 3 回投げ、出た目を順に n_1, n_2, n_3 とする。O を原点とする xy 平面上の点 A_1, A_2, A_3 を

$$A_k \left(\cos \left(\frac{2n_k}{5} \pi \right), \sin \left(\frac{2n_k}{5} \pi \right) \right) \quad (k = 1, 2, 3)$$

によって定める。

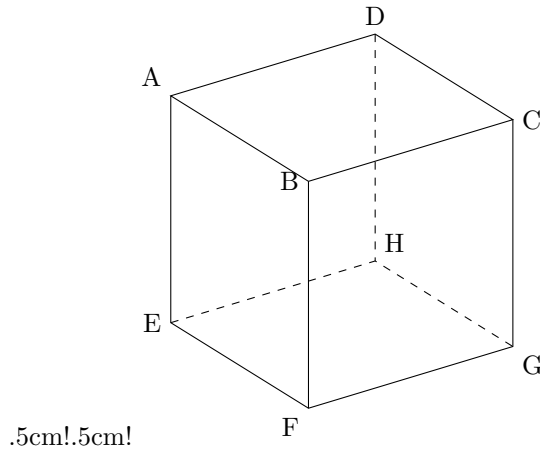
次の問いに答えよ。

- (1) 点 A_1, A_2, A_3 がすべて一致する確率を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ と $\overrightarrow{OA_3}$ が平行になる確率を求めよ。
- (3) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ と $\overrightarrow{OA_3}$ が平行になるという条件のもとで、 n_1, n_2, n_3 がすべて奇数である条件付き確率を求めよ。

第 3 問

立方体 ABCD-EFGH を考える。辺 AD, GH の中点をそれぞれ P, Q とする。辺 AB を $t : (1-t)$ に内分する点を R とする (ただし, $0 < t < 1$)。 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ と表す。いま, 4 点 B, C, G, F を通る平面上に点 S をとり, $\overrightarrow{AS} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$ (α, β, γ は実数) と表す。

次の問いに答えよ。



- (1) α を求めよ。また, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AR}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, t を用いて表せ。

以降, P, Q, R, S が同一平面上にあるとする。

- (2) β を γ, t の式で表せ。
- (3) 直線 PS と直線 QR が垂直に交わる時, β, γ をそれぞれ t の式で表せ。
- (4) 直線 PS と直線 QR が垂直に交わり, かつ点 S が立方体の面 BCGF 上にあるとき, t のとりうる値の範囲を求めよ。

第 4 問

次の問いに答えよ。

(1) 実数 x に対して, $e^x \geq x + 1$ が成り立つことを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^3 a_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

によって定める。

(i) $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して, $1 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < e^{\frac{1}{3n(n-1)}}$ が成り立つことを示せ。

(ii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $1 \leq a_n < e^{\frac{1}{3}}$ が成り立つことを示せ。

第 5 問

xy 平面上の曲線 $C : x = y^2$ を考える。実数 t に対して、曲線 C 上の点 (t^2, t) における C の法線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 法線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 $x = 1$ で囲まれる領域を D とする。また、実数 t が $t \leq 0$ をみたしながら動くとき、法線 ℓ が通過する領域を E とする。 D と E の共通部分を求め、図示せよ。
- (3) (2) で求めた D と E の共通部分の面積を求めよ。