

A2

数 学

(2025 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ ($0 < x < 2\pi$) に対して, xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。 $f(x)$ の増減, 極値, C の凹凸, 変曲点を調べ, C の概形を描け。

- (2) 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_1^t \log \left(\frac{x+1}{x} \right) dx - \log t \right)$$

2 1 個のさいころを 3 回投げ、出た目を順に n_1, n_2, n_3 とする。O を原点とする xy 平面上の点 A_1, A_2, A_3 を

$$A_k \left(\cos \left(\frac{2n_k}{5} \pi \right), \sin \left(\frac{2n_k}{5} \pi \right) \right) \quad (k = 1, 2, 3)$$

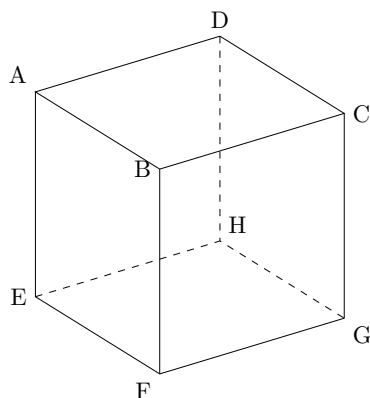
によって定める。

次の問いに答えよ。

- (1) 点 A_1, A_2, A_3 がすべて一致する確率を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ と $\overrightarrow{OA_3}$ が平行になる確率を求めよ。
- (3) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ と $\overrightarrow{OA_3}$ が平行になるという条件のもとで、 n_1, n_2, n_3 がすべて奇数である条件付き確率を求めよ。

3 立方体 ABCD-EFGH を考える。辺 AD, GH の中点をそれぞれ P, Q とする。辺 AB を $t : (1 - t)$ に内分する点を R とする (ただし, $0 < t < 1$)。 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ と表す。いま, 4 点 B, C, G, F を通る平面上に点 S をとり, $\overrightarrow{AS} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$ (α, β, γ は実数) と表す。

次の問いに答えよ。



- (1) α を求めよ。また, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AR}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, t を用いて表せ。

以降, P, Q, R, S が同一平面上にあるとする。

- (2) β を γ, t の式で表せ。
- (3) 直線 PS と直線 QR が垂直に交わる時, β, γ をそれぞれ t の式で表せ。
- (4) 直線 PS と直線 QR が垂直に交わり, かつ点 S が立方体の面 BCGF 上にあるとき, t のとりうる値の範囲を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

(1) 実数 x に対して, $e^x \geq x + 1$ が成り立つことを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^3 a_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

によって定める。

(i) $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して, $1 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < e^{\frac{1}{3n(n-1)}}$ が成り立つことを示せ。

(ii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $1 \leq a_n < e^{\frac{1}{3}}$ が成り立つことを示せ。

5 xy 平面上の曲線 $C : x = y^2$ を考える。実数 t に対して、曲線 C 上の点 (t^2, t) における C の法線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1) 法線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 $x = 1$ で囲まれる領域を D とする。また、実数 t が $t \leq 0$ をみたしながら動くとき、法線 ℓ が通過する領域を E とする。 D と E の共通部分を求め、図示せよ。

(3) (2) で求めた D と E の共通部分の面積を求めよ。

