

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2024年

試験時間：150分

問題数：5問

第 1 問

次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{e^{3x} + 4e^{2x} + e^x}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1} dx$$

を求めよ。

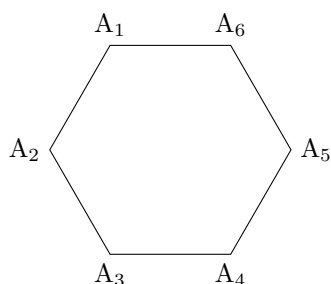
(2) 実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ が、すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ 、かつ

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{(t^2 + 1)f(t)} dt + 1$$

をみたすとき、 $f(x)$ を求めよ。

第 2 問

1 辺の長さが 1 の正六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ がある。



1 個のさいころを続けて 5 回投げ、出た目を順に n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 とおく。次の条件付き確率をそれぞれ求めよ。

- (1) 「 n_1, n_2, n_3 がすべて異なる」という条件のもとで、「三角形 $A_{n_1}A_{n_2}A_{n_3}$ の面積が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ である」という条件付き確率
- (2) 「 n_1, n_2, n_3 がすべて異なり、かつ、 $n_4 \neq n_5$ である」という条件のもとで、「線分 $A_{n_4}A_{n_5}$ が三角形 $A_{n_1}A_{n_2}A_{n_3}$ の面積を 2 等分する」という条件付き確率

第 3 問

四面体 $OABC$ において、点 P , Q , R は、それぞれ辺 OA , OB , OC を $1:1$, $2:1$, $3:1$ の比に内分する。点 C と $\triangle PQR$ の重心 G を通る直線が平面 OAB と交わる点を H とする。ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

さらに、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 9$, $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ であり、直線 CH が平面 OAB に直交しているとする。

(2) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ を求めよ。

(3) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

(4) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

第 4 問

α を, $|\alpha| < 1$ をみたす複素数とする。 $\overline{\alpha}z \neq 1$ となる複素数 z に対して,

$$w = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}z}$$

と定める。ただし, $\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。次の問いに答えよ。

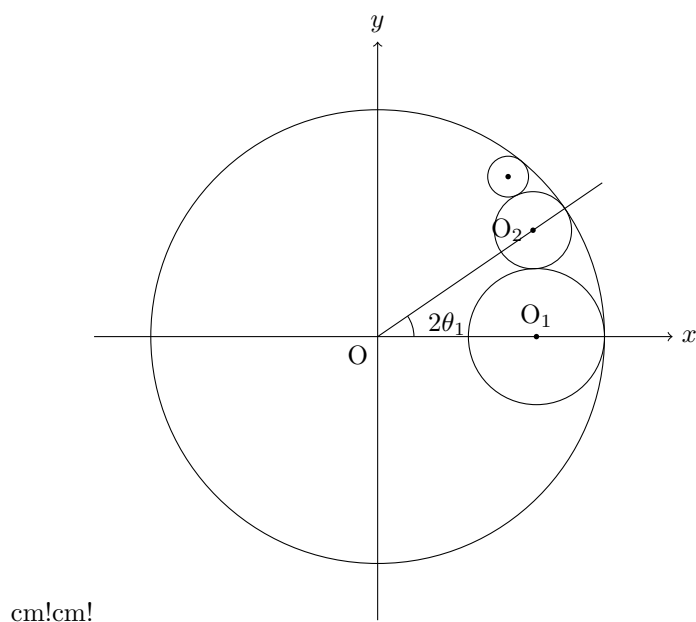
- (1) z が $|z| = \frac{1}{3}$ をみたしながら動くとき, w の描く図形 D を求め, $\alpha = \frac{1}{2}$ のとき, D を複素数平面に図示せよ。
- (2) α が $|\alpha| = \frac{1}{2}$ をみたしながら動くとき, (1) で求めた図形 D が通過する範囲 E を求め, E を複素数平面に図示せよ。

第 5 問

xy 平面上に、原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。さらに、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、中心 O_n 、半径 r_n の円 C_n があり、以下の (i), (ii), (iii) をみたす。

- (i) 点 O_1 の座標は $(1 - r_1, 0)$ であり、かつ $r_1 < 1$ である。
- (ii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 C_{n+1} は C に内接し、 C_{n+1} と C_n は外接する。
- (iii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、半直線 OO_{n+1} は、 O を中心として半直線 OO_n を時計の針の回転と逆向きに $2\theta_n$ 回転したものであり、 $0 < 2\theta_n < \pi$ である。

次の問いに答えよ。



- (1) $\sin^2 \theta_1$ を r_1, r_2 の式で表せ。

以下、 $r_n = \frac{1}{2^{n+1} + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。

- (2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $\sin \theta_n$ を n の式で表せ。

- (3) $0 < x < \frac{\pi}{6}$ に対して、

$$\sin x < x < \sin x + \frac{1}{5} \sin^3 x$$

を示せ。必要ならば、 $3.14 < \pi < 3.15$ を用いてよい。

- (4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \theta_k$ は存在し、その極限値を α とおく。 α の小数第 2 位まで (小数第 3 位切り捨て) を求めよ。必要ならば、 $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ を用いてよい。