

A2

数 学

(2024 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{e^{3x} + 4e^{2x} + e^x}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1} dx$$

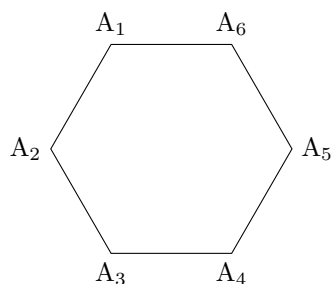
を求めよ。

(2) 実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ が, すべての実数 x に対して $f(x) > 0$, かつ

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{(t^2 + 1)f(t)} dt + 1$$

をみたすとき, $f(x)$ を求めよ。

2 1 辺の長さが 1 の正六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ がある。



1 個のさいころを続けて 5 回投げ、出た目を順に n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 とおく。次の条件付き確率をそれぞれ求めよ。

- (1) 「 n_1, n_2, n_3 がすべて異なる」という条件のもとで、「三角形 $A_{n_1}A_{n_2}A_{n_3}$ の面積が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ である」という条件付き確率
- (2) 「 n_1, n_2, n_3 がすべて異なり、かつ、 $n_4 \neq n_5$ である」という条件のもとで、「線分 $A_{n_4}A_{n_5}$ が三角形 $A_{n_1}A_{n_2}A_{n_3}$ の面積を 2 等分する」という条件付き確率

3 四面体 OABC において、点 P, Q, R は、それぞれ辺 OA, OB, OC を $1:1$, $2:1$, $3:1$ の比に内分する。点 C と $\triangle PQR$ の重心 G を通る直線が平面 OAB と交わる点を H とする。ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

さらに、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 9$, $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ であり、直線 CH が平面 OAB に直交しているとする。

(2) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ を求めよ。

(3) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

(4) 四面体 OABC の体積を求めよ。

4 α を, $|\alpha| < 1$ をみたす複素数とする。 $\overline{\alpha}z \neq 1$ となる複素数 z に対して,

$$w = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}z}$$

と定める。ただし, $\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。次の問いに答えよ。

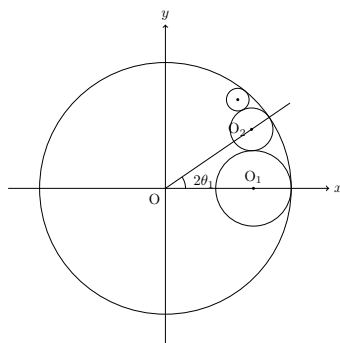
(1) z が $|z| = \frac{1}{3}$ をみたしながら動くとき, w の描く図形 D を求め,
 $\alpha = \frac{1}{2}$ のとき, D を複素数平面に図示せよ。

(2) α が $|\alpha| = \frac{1}{2}$ をみたしながら動くとき, (1) で求めた図形 D が通過する範囲 E を求め, E を複素数平面に図示せよ。

5 xy 平面上に、原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。さらに、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、中心 O_n 、半径 r_n の円 C_n があり、以下の (i), (ii), (iii) をみたす。

- (i) 点 O_1 の座標は $(1 - r_1, 0)$ であり、かつ $r_1 < 1$ である。
- (ii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 C_{n+1} は C に内接し、 C_{n+1} と C_n は外接する。
- (iii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、半直線 OO_{n+1} は、 O を中心として半直線 OO_n を時計の針の回転と逆向きに $2\theta_n$ 回転したものであり、 $0 < 2\theta_n < \pi$ である。

次の問いに答えよ。



- (1) $\sin^2 \theta_1$ を r_1, r_2 の式で表せ。

以下、 $r_n = \frac{1}{2^{n+1} + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。

- (2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $\sin \theta_n$ を n の式で表せ。

- (3) $0 < x < \frac{\pi}{6}$ に対して、

$$\sin x < x < \sin x + \frac{1}{5} \sin^3 x$$

を示せ。必要ならば、 $3.14 < \pi < 3.15$ を用いてよい。

- (4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \theta_k$ は存在し、その極限値を α とおく。 α の小数第 2 位まで (小数第 3 位切り捨て) を求めよ。必要ならば、 $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ を用いてよい。

