

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2023年

試験時間：150分

問題数：5問

第 1 問

n を正の整数とする。 xy 平面において、以下の 2 つの曲線 C_1 , C_2 を考える。

$$C_1 : y = (\cos x)^n \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C_2 : y = (\sin x)^n \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

次の問いに答えよ。

- (1) C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。
- (2) $n = 4$ のとき、 C_1 , C_2 と y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。
- (3) $n = 8$ のとき、 C_1 , C_2 と y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

第 2 問

さいころ A とさいころ B がある。はじめに、さいころ A を 2 回投げ、1 回目に出た目を a_1 、2 回目に出た目を a_2 とする。次に、さいころ B を 2 回投げ、1 回目に出た目を b_1 、2 回目に出た目を b_2 とする。次の問いに答えよ。

- (1) $a_1 \geq b_1 + b_2$ となる確率を求めよ。
- (2) $a_1 + a_2 > b_1 + b_2$ となる確率を求めよ。
- (3) $a_1 + a_2 > b_1 + b_2$ という条件のもとで、 $a_2 = 1$ となる条件付き確率を求めよ。

第 3 問

複素数平面上に 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする正三角形 ABC がある。次の問いに答えよ。

- (1) $\gamma = (1 - v)\alpha + v\beta$ (v は複素数) と表すとき, v をすべて求めよ。
- (2) 三角形 ABC の重心を $G(z)$ とする。 α , β , γ が次の条件 (*) をみたしながら動くとき, $|z|$ の最大値を求めよ。

$$(*) \quad \begin{cases} |\alpha| = 1, & \beta = \alpha^2, & |\gamma| \geq 1, \\ \alpha \text{ の偏角 } \theta \text{ は } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ の範囲にある。} \end{cases}$$

第 4 問

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + 7\sqrt{a_n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたす。次の問いに答えよ。

- (1) $\alpha = \sqrt{2 + 7\sqrt{\alpha}}$ をみたす $\sqrt{2}$ より大きい実数 α がただ 1 つ存在することを示し、 α を求めよ。
- (2) (1) で求めた α に対して、 $a_n < \alpha$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の極限を調べ、収束する場合はその極限值を求めよ。

第 5 問

関数 $f(x) = e^{-x}$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 正の実数 x に対して、以下の不等式を示せ。

$$1 - x < f(x) < 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

2 以上の整数 n, N (ただし $N \geq n$) に対して

$$S_{n,N} = \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^2 - 1} f\left(\frac{1}{k}\right)$$

とおく。

- (2) 2 以上の整数 n, N (ただし $N \geq n$) に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} < S_{n,N} < \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N+1}\right) \left(1 + \frac{1}{2n(n-1)}\right)$$

- (3) 各 n に対して、極限值 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{n,N}$ は存在し、その極限値を S_n とおく。 S_9 の小数第 3 位まで (小数第 4 位切り捨て) を求めよ。