

A2

数 学

(2023 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 n を正の整数とする。 xy 平面において、以下の 2 つの曲線 C_1 , C_2 を考える。

$$C_1 : y = (\cos x)^n \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C_2 : y = (\sin x)^n \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

次の問いに答えよ。

- (1) C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。
- (2) $n = 4$ のとき、 C_1 , C_2 と y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。
- (3) $n = 8$ のとき、 C_1 , C_2 と y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

2 さいころ A とさいころ B がある。はじめに、さいころ A を 2 回投げ、1 回目に出た目を a_1 、2 回目に出た目を a_2 とする。次に、さいころ B を 2 回投げ、1 回目に出た目を b_1 、2 回目に出た目を b_2 とする。次の問いに答えよ。

(1) $a_1 \geq b_1 + b_2$ となる確率を求めよ。

(2) $a_1 + a_2 > b_1 + b_2$ となる確率を求めよ。

(3) $a_1 + a_2 > b_1 + b_2$ という条件のもとで、 $a_2 = 1$ となる条件付き確率を求めよ。

3 複素数平面上に3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする正三角形 ABC がある。次の問いに答えよ。

(1) $\gamma = (1 - v)\alpha + v\beta$ (v は複素数) と表すとき, v をすべて求めよ。

(2) 三角形 ABC の重心を $G(z)$ とする。 α , β , γ が次の条件 (*) を満たしながら動くとき, $|z|$ の最大値を求めよ。

$$(*) \quad \begin{cases} |\alpha| = 1, & \beta = \alpha^2, & |\gamma| \geq 1, \\ \alpha \text{ の偏角 } \theta \text{ は } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ の範囲にある。} \end{cases}$$

4 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + 7\sqrt{a_n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたす。次の問いに答えよ。

- (1) $\alpha = \sqrt{2 + 7\sqrt{\alpha}}$ をみたす $\sqrt{2}$ より大きい実数 α がただ 1 つ存在することを示し、 α を求めよ。
- (2) (1) で求めた α に対して、 $a_n < \alpha$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の極限を調べ、収束する場合はその極限值を求めよ。

5 関数 $f(x) = e^{-x}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 正の実数 x に対して、以下の不等式を示せ。

$$1 - x < f(x) < 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

2 以上の整数 n, N (ただし $N \geq n$) に対して

$$S_{n,N} = \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^2 - 1} f\left(\frac{1}{k}\right)$$

とおく。

(2) 2 以上の整数 n, N (ただし $N \geq n$) に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} < S_{n,N} < \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N+1}\right) \left(1 + \frac{1}{2n(n-1)}\right)$$

(3) 各 n に対して、極限值 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{n,N}$ は存在し、その極限値を S_n とおく。
 S_9 の小数第 3 位まで (小数第 4 位切り捨て) を求めよ。

