

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2022年

試験時間：150分

問題数：5問

第 1 問

次の問いに答えよ。

- (1) 0 でない実数 a に対して、定積分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{at} \cos(2t) dt, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{at} \sin(2t) dt$$

を a の式で表せ。

- (2) xy 平面において、曲線 $C : x = e^{-2t} \cos t, y = e^{-t} \sin t \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$ と、 x 軸と、 y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

第 2 問

n を自然数とする。 xy 平面上を動く点 P があり、1 回の移動で次の (L), (R) のいずれかによって、 P は移動する。

$$\begin{cases} \text{点 } P \text{ が } (x, y) \text{ にあるとき,} \\ \text{(L) } (x-1, y-1) \text{ に移動する} \\ \text{(R) } (x+1, y-1) \text{ に移動する} \end{cases}$$

はじめ P は原点 $(0, 0)$ にあり、この移動を n 回繰り返す。このとき、 $k = 1, 2, \dots, n$ に対して、 P が k 回移動した後の x 座標を x_k とおく。

例えば $n = 2$ のとき、 P は「(L), (R)」の順に従って移動すると、 $(-1, -1)$, $(0, -2)$ の順に移動する。また P の移動の仕方は、「(L), (L)」, 「(L), (R)」, 「(R), (L)」, 「(R), (R)」のそれぞれに従って移動する 4 通りある。さらに、 $x_2 \leq 0$ をみたす P の移動の仕方は、「(L), (L)」, 「(L), (R)」, 「(R), (L)」のそれぞれに従って移動する 3 通りある。

次の問いに答えよ。

- (1) $n = 4$ のとき、 $x_k \leq 0$ ($k = 1, 2, 3$) かつ $x_4 = 0$ をみたす P の移動の仕方は何通りあるか。

以下、 $n = 8$ とする。 $x_1, \dots, x_8$ の最大値を M とし、 $x_1, \dots, x_8$ の最小値を m とする。

- (2) $-2 \leq m \leq M \leq 3$ をみたす P の移動の仕方は何通りあるか。
- (3) $m = -2$ かつ $M \leq 3$ をみたす P の移動の仕方は何通りあるか。
- (4) $m = -2$ かつ $1 \leq M \leq 3$ をみたす P の移動の仕方は何通りあるか。

第 3 問

$z \neq 1$ をみたす複素数 z に対して、複素数 w を

$$w = \frac{2z-3}{z-1}$$

と定める。 $r > 1$ をみたす実数 r に対して、 z が $|z| \geq r$ の範囲を動くとき、 w がとる値の範囲を D_r と表す。次の問いに答えよ。

- (1) $r = \frac{3}{2}$ のとき、 D_r を複素数平面に図示せよ。
- (2) E_r を D_r と実軸の共通部分とする。整数を表す点のうち、 E_r に含まれる点の個数を N_r とおく。 $N_r = 3$ となる r の範囲を求めよ。

第 4 問

1 辺の長さが 1 である正四面体 $OABC$ を考える。点 P , Q , R は, それぞれ辺 OA , OB , BC を以下のように内分する。

$$OP : PA = s : (1 - s), \quad OQ : QB = t : (1 - t), \quad BR : RC = u : (1 - u)$$

さらに, 点 O , $\triangle ABC$ の重心 G , $\triangle PQR$ の重心 H の 3 点は同一直線上にある。

次の問いに答えよ。

- (1) s , u を t の式で表せ。また s のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) $|\overrightarrow{QP}|^2$, $|\overrightarrow{QR}|^2$, 内積 $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$ を t の式で表せ。
- (3) $\triangle PQR$ の面積 S を t の式で表せ。また S が最小となる t の値を求めよ。

第 5 問

a を $0 < a \leq 1$ をみたす実数とする。関数

$$f(x) = 2 \log(\sin(ax)) - (\log x)^2 \quad \left(1 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ を微分せよ。
- (2) $a = 1$ のとき、 $f(x)$ の極値を与える x の個数を求めよ。
- (3) $a \leq \frac{1}{2}$ のとき、 $f(x)$ は極値をもたないことを示せ。ただし、 $\log \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}$ を証明せずに用いてよい。