

A2

数 学

(2022 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 0 でない実数 a に対して、定積分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{at} \cos(2t) dt, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{at} \sin(2t) dt$$

を a の式で表せ。

(2) xy 平面において、曲線 $C : x = e^{-2t} \cos t, y = e^{-t} \sin t \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と、 x 軸と、 y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

2 n を自然数とする。 xy 平面上を動く点 P があり、1 回の移動で次の (L), (R) のいずれかによって、 P は移動する。

$$\begin{cases} \text{点 } P \text{ が } (x, y) \text{ にあるとき,} \\ \text{(L) } (x-1, y-1) \text{ に移動する} \\ \text{(R) } (x+1, y-1) \text{ に移動する} \end{cases}$$

はじめ P は原点 $(0, 0)$ にあり、この移動を n 回繰り返す。このとき、 $k = 1, 2, \dots, n$ に対して、 P が k 回移動した後の x 座標を x_k とおく。

例えば $n = 2$ のとき、 P は「(L), (R)」の順に従って移動すると、 $(-1, -1)$, $(0, -2)$ の順に移動する。また P の移動の仕方は、「(L), (L)」, 「(L), (R)」, 「(R), (L)」, 「(R), (R)」のそれぞれに従って移動する 4 通りある。さらに、 $x_2 \leq 0$ をみたす P の移動の仕方は、「(L), (L)」, 「(L), (R)」, 「(R), (L)」のそれぞれに従って移動する 3 通りある。

次の問いに答えよ。

(1) $n = 4$ のとき、 $x_k \leq 0$ ($k = 1, 2, 3$) かつ $x_4 = 0$ をみたす P の移動の仕方は何通りあるか。

以下、 $n = 8$ とする。 $x_1, \dots, x_8$ の最大値を M とし、 $x_1, \dots, x_8$ の最小値を m とする。

(2) $-2 \leq m \leq M \leq 3$ をみたす P の移動の仕方は何通りあるか。

(3) $m = -2$ かつ $M \leq 3$ をみたす P の移動の仕方は何通りあるか。

(4) $m = -2$ かつ $1 \leq M \leq 3$ をみたす P の移動の仕方は何通りあるか。

3 $z \neq 1$ をみたす複素数 z に対して、複素数 w を

$$w = \frac{2z - 3}{z - 1}$$

と定める。 $r > 1$ をみたす実数 r に対して、 z が $|z| \geq r$ の範囲を動くとき、 w がとる値の範囲を D_r と表す。次の問いに答えよ。

(1) $r = \frac{3}{2}$ のとき、 D_r を複素数平面に図示せよ。

(2) E_r を D_r と実軸の共通部分とする。整数を表す点のうち、 E_r に含まれる点の個数を N_r とおく。 $N_r = 3$ となる r の範囲を求めよ。

4 1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える。点 P, Q, R は、それぞれ辺 OA, OB, BC を以下のように内分する。

$$OP : PA = s : (1 - s), \quad OQ : QB = t : (1 - t), \quad BR : RC = u : (1 - u)$$

さらに、点 O, $\triangle ABC$ の重心 G, $\triangle PQR$ の重心 H の 3 点は同一直線上にある。

次の問いに答えよ。

(1) s, u を t の式で表せ。また s のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{QP}|^2, |\overrightarrow{QR}|^2$, 内積 $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$ を t の式で表せ。

(3) $\triangle PQR$ の面積 S を t の式で表せ。また S が最小となる t の値を求めよ。

5 a を $0 < a \leq 1$ をみたす実数とする。関数

$$f(x) = 2 \log(\sin(ax)) - (\log x)^2 \quad \left(1 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

について、次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を微分せよ。

(2) $a = 1$ のとき、 $f(x)$ の極値を与える x の個数を求めよ。

(3) $a \leq \frac{1}{2}$ のとき、 $f(x)$ は極値をもたないことを示せ。ただし、 $\log \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}$ を証明せずに用いてよい。

