

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2020 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = (e^x - 1) \cos x - \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ の増減, 極値を調べ, そのグラフの概形を描け。ただし, グラフの凹凸, 変曲点は調べなくてよい。

- (2) 定積分

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(\sin x)}{\tan x} dx$$

を求めよ。

第 2 問

次の問いに答えよ。

- (1) 実数 A, B, C, D に対して、複素数 z を

$$z = \frac{A + \sqrt{5}Bi}{C + \sqrt{5}Di}$$

で定める。ただし、 $C + \sqrt{5}Di \neq 0$ とする。このとき、 $z = x + yi$ をみたす実数 x, y を A, B, C, D の式で表せ。

- (2) 次をみたす整数 A, B, C, D を求めよ。

$$\begin{cases} \frac{16 + \sqrt{5}i}{29} = \frac{A + \sqrt{5}Bi}{C + \sqrt{5}Di} \\ AD - BC = -1 \\ D > 0 \end{cases}$$

第 3 問

中身の見えない 2 つの箱 A, B がある。箱 A には白玉と赤玉がそれぞれ 2 個ずつ入っており、箱 B には白玉 1 個だけが入っている。このとき、 n を正の整数として、次の操作 (*) を考える。

(*) はじめに、箱 A の中身をよくかきまぜて、箱 A から玉を 2 個取り出し、色を確認しないで、箱 B に 2 個とも入れる。次に、「箱 B の中身をよくかきまぜて、箱 B から玉を 1 個取り出し、色を確認した後、箱 B に戻す」という作業を n 回繰り返す。

操作 (*) を一度行なったとき、箱 B から取り出した玉が n 回ともすべて白玉である確率を p_n とし、箱 B から取り出した玉が n 回ともすべて白玉であるという条件のもとで、はじめに箱 A から取り出した玉が 2 個とも白玉である条件付き確率を q_n とする。

次の問いに答えよ。

- (1) p_2, q_2 を求めよ。
- (2) p_n, q_n を求めよ。
- (3) $q_n > \frac{1}{2}$ をみたす最小の n の値を求めよ。

第 4 問

xyz 空間に、2 点 $A(1, 2, 9)$, $B(-3, 6, 7)$ を通る直線 ℓ がある。また、 ℓ 上の点 P , Q と、 x 軸上の点 R , S は

直線 $PR \perp xy$ 平面, 直線 $QS \perp x$ 軸, 直線 $QS \perp \ell$

をみたす。次の問いに答えよ。

- (1) P , R の座標を求めよ。
- (2) Q , S の座標を求めよ。
- (3) 線分 PQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面と、 P を含む x 軸に垂直な平面と、 Q を含む x 軸に垂直な平面で囲まれた立体の体積を求めよ。

第 5 問

a を正の実数とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して,

$$I_n = \int_0^1 x^{n+a-1} e^{-x} dx$$

と定める。次の問いに答えよ。

- (1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $I_n \leq \frac{1}{n+a}$ を示せ。
- (2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $I_{n+1} - (n+a)I_n$ を求めよ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ を求めよ。
- (4) 実数 b, c に対して, $J_n = n^3 \left(I_n + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} \right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定める。数列 $\{J_n\}$ が収束するとき, 次の問いに答えよ。
 - (ア) b を求めよ。
 - (イ) c を a の式で表せ。
 - (ウ) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$ を a の式で表せ。