

A2

数 学

(2020 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = (e^x - 1) \cos x - \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ の増減，極値を調べ，そのグラフの概形を描け。ただし，グラフの凹凸，変曲点は調べなくてよい。

- (2) 定積分

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(\sin x)}{\tan x} dx$$

を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

(1) 実数 A, B, C, D に対して、複素数 z を

$$z = \frac{A + \sqrt{5}Bi}{C + \sqrt{5}Di}$$

で定める。ただし、 $C + \sqrt{5}Di \neq 0$ とする。このとき、 $z = x + yi$ を
みたす実数 x, y を A, B, C, D の式で表せ。

(2) 次をみたす整数 A, B, C, D を求めよ。

$$\begin{cases} \frac{16 + \sqrt{5}i}{29} = \frac{A + \sqrt{5}Bi}{C + \sqrt{5}Di} \\ AD - BC = -1 \\ D > 0 \end{cases}$$

3 中身の見えない2つの箱 A, B がある。箱 A には白玉と赤玉がそれぞれ2個ずつ入っており、箱 B には白玉1個だけが入っている。このとき、 n を正の整数として、次の操作 (*) を考える。

(*) はじめに、箱 A の中身をよくかきまぜて、箱 A から玉を2個取り出し、色を確認しないで、箱 B に2個とも入れる。次に、「箱 B の中身をよくかきまぜて、箱 B から玉を1個取り出し、色を確認した後、箱 B に戻す」という作業を n 回繰り返す。

操作 (*) を一度行なったとき、箱 B から取り出した玉が n 回ともすべて白玉である確率を p_n とし、箱 B から取り出した玉が n 回ともすべて白玉であるという条件のもとで、はじめに箱 A から取り出した玉が2個とも白玉である条件付き確率を q_n とする。

次の問いに答えよ。

(1) p_2, q_2 を求めよ。

(2) p_n, q_n を求めよ。

(3) $q_n > \frac{1}{2}$ をみたす最小の n の値を求めよ。

4 xyz 空間に、2 点 $A(1, 2, 9)$, $B(-3, 6, 7)$ を通る直線 ℓ がある。また、 ℓ 上の点 P , Q と、 x 軸上の点 R , S は

直線 $PR \perp xy$ 平面, 直線 $QS \perp x$ 軸, 直線 $QS \perp \ell$

をみたす。次の問いに答えよ。

(1) P , R の座標を求めよ。

(2) Q , S の座標を求めよ。

(3) 線分 PQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面と、 P を含む x 軸に垂直な平面と、 Q を含む x 軸に垂直な平面で囲まれた立体の体積を求めよ。

5 a を正の実数とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して,

$$I_n = \int_0^1 x^{n+a-1} e^{-x} dx$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $I_n \leq \frac{1}{n+a}$ を示せ。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $I_{n+1} - (n+a)I_n$ を求めよ。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ を求めよ。

(4) 実数 b, c に対して, $J_n = n^3 \left(I_n + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} \right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定める。数列 $\{J_n\}$ が収束するとき, 次の問いに答えよ。

(ア) b を求めよ。

(イ) c を a の式で表せ。

(ウ) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$ を a の式で表せ。

