A 2

数　　学

（2019 年度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には，問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1 三角形 OAB があり，各辺の長さは $\mathrm{OA} = 1$，$\mathrm{OB} = \sqrt{3}$，$\mathrm{AB} = 2$ である。自然数 n に対し，

$$\mathrm{AP}_k = \frac{k}{n}\mathrm{AB} \qquad (k = 1,\, 2,\, \cdots,\, n)$$

となるような点 $\mathrm{P}_1,\, \mathrm{P}_2,\, \cdots,\, \mathrm{P}_n$ を辺 AB 上にとる。次の問いに答えよ。

(1) 線分 OP_k $(k = 1,\, 2,\, \cdots,\, n)$ の長さを求めよ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\mathrm{OP}_k)^2}$ を求めよ。

2 1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC がある。辺 OA 上に点 D，辺 OB 上に点 E，辺 OC 上に点 F があり，

$$\mathrm{OD} : \mathrm{DA} = 1 : 1, \quad \mathrm{OE} : \mathrm{EB} = 2 : 1, \quad \mathrm{OF} : \mathrm{FC} = 2 : 3$$

をみたしている。さらに辺 OB と辺 AC の中点をそれぞれ M，N とする。平面 DEF と直線 MN の交点を P とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right|$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|$ を求めよ。

3 n を 3 以上の整数とする。1 個のさいころを n 回投げたときに，出た目を大きい順に並べたものを

$$X_1,\, X_2,\, \cdots,\, X_n \qquad (X_1 \geqq X_2 \geqq \cdots \geqq X_n)$$

とする。たとえば，1 個のさいころを 5 回投げて，出た目が順に 4, 5, 3, 4, 2 であったとすると，

$$X_1 = 5, \quad X_2 = 4, \quad X_3 = 4, \quad X_4 = 3, \quad X_5 = 2$$

となる。1 個のさいころを n 回投げたとき，次の事象が起こる確率をそれぞれ求めよ。

(1) $X_n = 2$

(2) $X_2 = 6$

(3) $X_2 = 6$ かつ $X_n = 2$

4 O を原点とする xy 平面上に 2 点 A $(2,\ 0)$，B $(0,\ 2)$ がある。2 点 P，Q は条件 $(*)$ をみたしながら動く。

$$(*)\quad \begin{cases} \text{P は線分 OA 上にある。} \\ \text{Q は線分 OB 上にある。} \\ \triangle\text{OPQ の面積は 1 である。} \end{cases}$$

点 P の座標を $(t,\ 0)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) t が (1) で求めた範囲を動くとき，線分 PQ が通過する領域を xy 平面上に図示せよ。

(3) (2) で求めた領域の面積 S を求めよ。

5 2つの関数 $f(x) = e^{-x}\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ と $g(x) = -e^{-x}$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が最小値をとるときの x の値を求めよ。

(2) $f(x) = g(x)$ をみたす x の値を求めよ。

(3) 2曲線 $C_1 : y = f(x)$，$C_2 : y = g(x)$ と y 軸で囲まれる部分を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ。