

# 入学試験過去問題

## 数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2018年

試験時間：150分

問題数：5問

## 第 1 問

次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

を求めよ。

(2)  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  で定義された関数  $f(x)$  が

$$f(x) \cos^2 x = \pi - \frac{x}{\log 2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) dt$$

をみたすとき,  $f(x)$  を求めよ。

## 第 2 問

O を原点とする  $xyz$  空間に点 A (2, 0, -1), および, 中心を点 B (0, 0, 1) とする半径  $\sqrt{2}$  の球面  $S$  がある。平面  $z = 0$  上の点 P ( $a, b, 0$ ) を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 AP 上の点 Q に対して  $\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AP}$  と表すとき,  $\overrightarrow{OQ}$  を  $a, b, t$  を用いて表せ。
- (2) 直線 AP が球面  $S$  と共有点をもつとき, 点 P の存在範囲を  $ab$  平面上に図示せよ。
- (3) 球面  $S$  と平面  $x = -1$  の共通部分を  $T$  とする。直線 AP が  $T$  と共有点をもつとき, 点 P の存在範囲を  $ab$  平面上に図示せよ。

### 第 3 問

$\alpha$  を複素数とする。 $z \neq -\alpha$  をみたす複素数  $z$  に対して、 $w = \frac{z+2\alpha}{z+\alpha}$  と定める。 $|z-1|=1$  をみたすようなすべての  $z$  に対して、 $|w-1|=1$  が成り立つ。次の問いに答えよ。

- (1)  $\alpha$  を求めよ。
- (2)  $w = z$  をみたす  $z$  を求めよ。
- (3)  $z_0 = 1+i$  とし、 $z \neq z_0$  かつ  $z \neq -\alpha$  とする。複素数平面上の 3 点  $A(z_0)$ ,  $P(z)$ ,  $Q(w)$  を考える。直線  $AP$  と直線  $AQ$  が垂直に交わるような点  $P$  の全体が表す図形を、複素数平面上に図示せよ。

## 第 4 問

$c$  を 5 で割り切れない 2 以上の整数とする。数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  は以下の条件をみたす。

(i)  $a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は  $0, 1, \dots, c-1$  のいずれかである。

(ii)  $b_n$  は

$$b_1 = 1, \quad cb_{n+1} = 5a_n + b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたす整数である。

次の問いに答えよ。

(1)  $c = 3$  のとき,  $a_n, b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を求めよ。

(2)  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して,  $0 < b_n < 5$  を示せ。

(3)  $c = 5\ell + 4$  ( $\ell$  は 0 以上の整数) のとき,  $a_n, b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を求めよ。

## 第 5 問

$xy$  平面上に双曲線  $C_1 : y = \frac{1}{x}$  がある。 $C_1$  上の点  $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$  ( $t > 0$ ) における  $C_1$  の接線を  $\ell$  とする。放物線  $C_2 : y = x^2 + ax + b$  ( $a, b$  は実数) は点  $P$  を通り、 $C_1$  と第 3 象限において共有点をただ 1 つもつとする。 $C_2$  と  $\ell$  で囲まれた部分の面積を  $S$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $\ell$  の方程式を求めよ。
- (2)  $a, b$  をそれぞれ  $t$  の式で表せ。
- (3)  $S$  を  $t$  の式で表せ。
- (4)  $t$  が正の実数全体を動くとき、 $S$  の最小値を求めよ。