A 2

数　　学

（2018 年度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には，問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$$

を求めよ。

(2) $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(x)$ が

$$f(x)\cos^2 x = \pi - \frac{x}{\log 2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\,dt$$

をみたすとき，$f(x)$ を求めよ。

2 O を原点とする xyz 空間に点 A $(2,\ 0,\ -1)$，および，中心を点 B $(0,\ 0,\ 1)$ とする半径 $\sqrt{2}$ の球面 S がある。平面 $z=0$ 上の点 P $(a,\ b,\ 0)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 直線 AP 上の点 Q に対して $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と表すとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を a，b，t を用いて表せ。

(2) 直線 AP が球面 S と共有点をもつとき，点 P の存在範囲を ab 平面上に図示せよ。

(3) 球面 S と平面 $x=-1$ の共通部分を T とする。直線 AP が T と共有点をもつとき，点 P の存在範囲を ab 平面上に図示せよ。

3 α を複素数とする。$z \neq -\alpha$ をみたす複素数 z に対して，$w = \dfrac{z+2\alpha}{z+\alpha}$ と定める。$|z-1| = 1$ をみたすようなすべての z に対して，$|w-1| = 1$ が成り立つ。次の問いに答えよ。

(1) α を求めよ。

(2) $w = z$ をみたす z を求めよ。

(3) $z_0 = 1 + i$ とし，$z \neq z_0$ かつ $z \neq -\alpha$ とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(z_0)$，$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(w)$ を考える。直線 AP と直線 AQ が垂直に交わるような点 P の全体が表す図形を，複素数平面上に図示せよ。

4 c を 5 で割り切れない 2 以上の整数とする。数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は以下の条件をみたす。

(i) a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は $0, 1, \cdots, c-1$ のいずれかである。

(ii) b_n は

$$b_1 = 1, \quad cb_{n+1} = 5a_n + b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたす整数である。

次の問いに答えよ。

(1) $c = 3$ のとき，a_n，b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ。

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，$0 < b_n < 5$ を示せ。

(3) $c = 5\ell + 4$（ℓ は 0 以上の整数）のとき，a_n，b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ。

5 xy 平面上に双曲線 $C_1 : y = \dfrac{1}{x}$ がある。C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ $(t > 0)$ における C_1 の接線を ℓ とする。放物線 $C_2 : y = x^2 + ax + b$（a，b は実数）は点 P を通り，C_1 と第 3 象限において共有点をただ 1 つもつとする。C_2 と ℓ で囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) a，b をそれぞれ t の式で表せ。

(3) S を t の式で表せ。

(4) t が正の実数全体を動くとき，S の最小値を求めよ。