

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2017年

試験時間：150分

問題数：5問

第 1 問

次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = (3-x)e^x$ について、関数の増減、極値、グラフの凹凸を調べ、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ は証明なしで用いてよい。

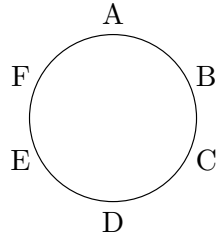
- (2) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}$$

を求めよ。

第 2 問

円卓に A, B, C, D, E, F の 6 人が下の図のように座っており、さいころが 1 個ある。



このとき、次の試行(*)を繰り返し、得点を獲得していくゲームを考える。ただし、ゲーム開始時は、A がさいころを持っており、各自の持ち点は 0 点であるとする。

- (*) さいころを持っている人が、そのさいころを 1 回投げて、出た目を k とする。このとき、投げた人から時計回りに k 人目の人がさいころを受け取り、さいころを受け取った人の持ち点に k 点が加算される。

たとえば、A がさいころを投げて 5 の目が出た場合は、F がさいころを受け取り、F の持ち点に 5 点が加算される。

試行(*)を 4 回繰り返してゲームを終了する。次の問いに答えよ。

- (1) ゲーム終了時に A の持ち点が 0 点である確率を求めよ。
- (2) ゲーム終了時に A の持ち点が 5 点である確率を求めよ。
- (3) ゲーム終了時に A の持ち点が 5 点であるとき、E の持ち点が 3 点である条件付き確率を求めよ。

第 3 問

空間に 2 つの定点 O , A があり, $|\vec{OA}| = 2$ をみたしている。また, 2 点 P , Q は次の条件をみたしながら動く。

$$\begin{aligned} |\vec{OP}| &\leq 5, & \vec{OP} \cdot \vec{OA} &= 6 \\ |\vec{OQ}| &= \sqrt{5}, & \vec{OQ} \cdot \vec{OA} &= -2 \end{aligned}$$

ただし, $\vec{OP} \cdot \vec{OA}$ は $\vec{OP}$ と $\vec{OA}$ の内積を表す。次の問いに答えよ。

- (1) $|\vec{OP}|$ の最小値を求めよ。
- (2) $|\vec{PQ}|$ のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) 線分 PQ が通過してできる部分の体積を求めよ。

第 4 問

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は以下の条件をみたす。

- (i) $a_1 = 1$, $a_n \neq 0$ ($n = 2, 3, 4, \dots$)
- (ii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, b_n は $\frac{1}{a_n}$ より大きい最小の自然数である。
- (iii) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{b_n}$ が成り立つ。

次の問いに答えよ。

- (1) b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 を求めよ。
- (2) $b_1 b_2 \cdots b_n a_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k}$ を求めよ。

第 5 問

正の実数 a, b に対して, 連立不等式

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq x^2 \\ a^2x^2 - (y - b)^2 \geq 0 \end{cases}$$

が表す xy 平面上の領域の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) S を a, b の式で表せ。

(2) a, b が

$$\frac{a^2}{4} + \frac{4b^2}{9} = 1 \quad (a, b > 0)$$

をみたしながら動くとき, S の最大値およびそのときの a, b の値を求めよ。