A 2

数　　学

（2017 年度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には，問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

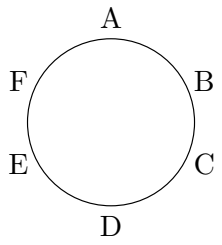
(1) 関数 $f(x) = (3-x)e^x$ について，関数の増減，極値，グラフの凹凸を調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ は証明なしで用いてよい。

(2) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$$

を求めよ。

2 円卓にA，B，C，D，E，Fの6人が下の図のように座っており，さいころが1個ある。



このとき，次の試行 $(*)$ を繰り返し，得点を獲得していくゲームを考える。ただし，ゲーム開始時は，Aがさいころを持っており，各自の持ち点は0点であるとする。

$(*)$　さいころを持っている人が，そのさいころを1回投げて，出た目を k とする。このとき，投げた人から時計回りに k 人目の人がさいころを受け取り，さいころを受け取った人の持ち点に k 点が加算される。

たとえば，Aがさいころを投げて5の目が出た場合は，Fがさいころを受け取り，Fの持ち点に5点が加算される。

試行 $(*)$ を4回繰り返してゲームを終了する。次の問いに答えよ。

(1) ゲーム終了時にAの持ち点が0点である確率を求めよ。

(2) ゲーム終了時にAの持ち点が5点である確率を求めよ。

(3) ゲーム終了時にAの持ち点が5点であるとき，Eの持ち点が3点である条件付き確率を求めよ。

3 空間に 2 つの定点 O，A があり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 2$ をみたしている。また，2 点 P，Q は次の条件をみたしながら動く。

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| \leqq 5, \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \sqrt{5}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = -2$$

ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の内積を表す。次の問いに答えよ。

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最小値を求めよ。

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) 線分 PQ が通過してできる部分の体積を求めよ。

4 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は以下の条件をみたす。

(i) $a_1 = 1$，$a_n \neq 0$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$

(ii) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，b_n は $\dfrac{1}{a_n}$ より大きい最小の自然数である。

(iii) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，$a_{n+1} = a_n - \dfrac{1}{b_n}$ が成り立つ。

次の問いに答えよ。

(1) b_1，a_2，b_2，a_3，b_3 を求めよ。

(2) $b_1 b_2 \cdots b_n a_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}$ を求めよ。

5 正の実数 a，b に対して，連立不等式

$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq x^2 \\ a^2x^2 - (y-b)^2 \geqq 0 \end{cases}$$

が表す xy 平面上の領域の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) S を a，b の式で表せ。

(2) a，b が

$$\frac{a^2}{4} + \frac{4b^2}{9} = 1 \quad (a,\ b > 0)$$

をみたしながら動くとき，S の最大値およびそのときの a，b の値を求めよ。