A 2

数　　学

（2016 年度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には，問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{\log(1-x)}{x}$ は $0 < x < 1$ の範囲で減少することを示せ。

(2) 極限値

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan\left(\dfrac{(n+k)\pi}{6n}\right)}$$

を求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 5, \quad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \frac{2}{3} a_n a_{n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすとする。次の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3 を求めよ。

(2) a_{n+2} を a_n，a_{n+1} を用いて表せ。

(3) 一般項 a_n を求めよ。

3 四面体 OABC があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。三角形 ABC の重心を G とする。点 D, E, P を $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 3\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 6\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ をみたす点とし，平面 ADE と直線 OP の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 三角形 ADE の面積を S_1，三角形 QDE の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(3) 四面体 OADE の体積を V_1，四面体 PQDE の体積を V_2 とするとき，$\dfrac{V_2}{V_1}$ を求めよ。

4 a を正の定数とする。2 つの曲線 $C_1 : y = x\log x$ と $C_2 : y = ax^2$ の両方に接する直線の本数を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x} = 0$ は証明なしに用いてよい。

5 xy 平面上に楕円 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}\,(a,\ b)$ を通る C の接線が 2 本あり，それらが直交するとき，a，b がみたす条件を求めよ。

(2) C に外接する長方形のうち，x 座標が 1 で y 座標が正である頂点をもつものの面積を求めよ。