

A 2

数 学

(2015 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_0^{\log 3} \frac{dx}{e^x + 5e^{-x} - 2}$$

を求めよ。

(2) $x > 0$ のとき, 不等式

$$\log x \geq \frac{5x^2 - 4x - 1}{2x(x+2)}$$

が成り立つことを示せ。

2 点 O を中心とする半径 1 の円に内接する三角形 ABC があり,

$$2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

をみたしている。この円上に点 P があり, 線分 AB と線分 CP は直交している。次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ と $|\overrightarrow{AB}|$ をそれぞれ求めよ。

(2) 線分 AB と線分 CP の交点を H とするとき, $AH : HB$ を求めよ。

(3) 四角形 $APBC$ の面積を求めよ。

3 実数 a に対し, xy 平面上の放物線 $C : y = (x - a)^2 - 2a^2 + 1$ を考える。
次の問いに答えよ。

- (1) a がすべての実数を動くとき, C が通過する領域を求め, 図示せよ。
- (2) a が $-1 \leq a \leq 1$ の範囲を動くとき, C が通過する領域を求め, 図示せよ。

4 自然数を2個以上の連続する自然数の和で表すことを考える。たとえば、42は $3 + 4 + \cdots + 9$ のように2個以上の連続する自然数の和で表せる。次の問いに答えよ。

- (1) 2020を2個以上の連続する自然数の和で表す表し方をすべて求めよ。
- (2) a を0以上の整数とすると、 2^a は2個以上の連続する自然数の和で表せないことを示せ。
- (3) a, b を自然数とすると、 $2^a(2b+1)$ は2個以上の連続する自然数の和で表せることを示せ。

5 1個のさいころを3回続けて投げ、出た目を順に a, b, c とする。不等式

$$\int_0^\pi (\cos ax)(\cos bx)(\cos cx) dx > 0$$

をみたす確率を求めよ。

