

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2014 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

次の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3 \cos(x^2) dx$ を求めよ。

(2) $0 < x < 1$ のとき, 不等式

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1} < x^x$$

が成り立つことを示せ。

第 2 問

r を $0 < r < 1$ をみたす定数とする。次の問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ で定める。ただし、実数 x に対して、 $[x]$ は $\ell \leq x < \ell + 1$ をみたす整数 ℓ を表す。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{3n} (-1)^{k-1} r^{a_k}$$

を求めよ。

- (2) 数列 $\{b_n\}$ を

$$n \text{ が奇数のとき } b_n = n$$

$$n \text{ が偶数のとき } b_n = 2n$$

で定める。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} r^{\frac{b_k}{n}}$$

を求めよ。

第 3 問

O を原点とする座標空間に、4 点

$$A(-2, 1, 3), \quad B(s, 3, -1), \quad C(1, 3, 4), \quad D(t, 2t, 2t)$$

がある。ただし、 s, t は実数で $t \neq 0$ である。A を通り $\overrightarrow{OC}$ に平行な直線と、B を通り $\overrightarrow{OD}$ に平行な直線が点 P で交わるとする。次の問いに答えよ。

(1) s の値および P の座標を求めよ。

以下では $\triangle PAB \sim \triangle OCD$ を仮定する。

(2) t の値を求めよ。

(3) D から平面 PAB に下ろした垂線を DH とするとき、H の座標を求めよ。

第 4 問

平面上に半径 1 と半径 2 の同心円 C_1 と C_2 がある。自然数 n に対して、 C_2 の周を $3n$ 等分する $3n$ 個の点がある。この $3n$ 個の点の中から異なる 3 点を選ぶとき、次の (*) をみたす選び方の総数を a_k ($k = 0, 1, 2, 3$) とする。

(*)選んだ 3 点を頂点とする三角形の辺のうち、ちょうど k 個が C_1 の周と共有点をもつ。

次の問いに答えよ。

- (1) $n = 2$ のとき、 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 a_0, a_1, a_2, a_3 を n の式で表せ。

第 5 問

xy 平面上に曲線 $C: y = x^2$ がある。 C 上の 2 点 P, Q が $PQ = 2$ をみたしながら動くとき、 PQ の中点の軌跡を D とする。次の問いに答えよ。

- (1) D の方程式を求めよ。
- (2) C, D, y 軸および直線 $x = \frac{1}{2}$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。