

A2

数 学

(2014 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3 \cos(x^2) dx$ を求めよ。

(2) $0 < x < 1$ のとき, 不等式

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1} < x^x$$

が成り立つことを示せ。

2 r を $0 < r < 1$ をみたす定数とする。次の問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ で定める。ただし、実数 x に対して、 $[x]$ は $\ell \leq x < \ell + 1$ をみたす整数 ℓ を表す。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{3n} (-1)^{k-1} r^{a_k}$$

を求めよ。

- (2) 数列 $\{b_n\}$ を

$$n \text{ が奇数のとき } b_n = n$$

$$n \text{ が偶数のとき } b_n = 2n$$

で定める。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} r^{\frac{b_k}{n}}$$

を求めよ。

3 O を原点とする座標空間に、4 点

$$A(-2, 1, 3), \quad B(s, 3, -1), \quad C(1, 3, 4), \quad D(t, 2t, 2t)$$

がある。ただし、 s, t は実数で $t \neq 0$ である。 A を通り $\overrightarrow{OC}$ に平行な直線と、 B を通り $\overrightarrow{OD}$ に平行な直線が点 P で交わるとする。次の問いに答えよ。

(1) s の値および P の座標を求めよ。

以下では $\triangle PAB \sim \triangle OCD$ を仮定する。

(2) t の値を求めよ。

(3) D から平面 PAB に下ろした垂線を DH とするとき、 H の座標を求めよ。

4 平面上に半径 1 と半径 2 の同心円 C_1 と C_2 がある。自然数 n に対して、 C_2 の周を $3n$ 等分する $3n$ 個の点がある。この $3n$ 個の点の中から異なる 3 点を選ぶとき、次の (*) をみたす選び方の総数を a_k ($k = 0, 1, 2, 3$) とする。

(*)選んだ 3 点を頂点とする三角形の辺のうち、ちょうど k 個が C_1 の周と共有点をもつ。

次の問いに答えよ。

(1) $n = 2$ のとき、 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ。

(2) $n \geq 2$ のとき、 a_0, a_1, a_2, a_3 を n の式で表せ。

5 xy 平面上に曲線 $C : y = x^2$ がある。 C 上の 2 点 P, Q が $PQ = 2$ をみたしながら動くとき、 PQ の中点の軌跡を D とする。次の問いに答えよ。

(1) D の方程式を求めよ。

(2) C, D, y 軸および直線 $x = \frac{1}{2}$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

