

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2013年

試験時間：150分

問題数：5問

第 1 問

次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int e^{-x} \sin^2 x \, dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^1 \sqrt{1 + 2\sqrt{x}} \, dx$ を求めよ。

第 2 問

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $A^2 = A$ を満たす。行列 B は $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, $B^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす。次の問いに答えよ。

- (1) $a + d$, $ad - bc$ を求めよ。
- (2) B を a を用いて表せ。
- (3) $c = 1$ のとき、実数 s , t に対して

$$(sA + tB)^n = x_n A + y_n B \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と表されることを示し、 x_n , y_n を s , t , n を用いて表せ。

第 3 問

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ を満たす θ に対し, xy 平面の第 1 象限の点 P および x 軸の正の部分にある点 Q を

$$\angle QOP = \theta, \quad \angle PQO = 2\theta, \quad PQ = 1$$

を満たすようにとる。PQ の中点を R とする。 θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ の範囲を動くとき, P の軌跡を C_1 , R の軌跡を C_2 とする。O は xy 平面の原点である。次の問いに答えよ。

- (1) P, Q, R の座標を θ を用いて表せ。
- (2) C_1, C_2 を求め, それらを図示せよ。
- (3) C_1, C_2 および x 軸で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

第 4 問

1 つの整数を表示する装置がある。最初に 2013 が表示されている。さいころを 1 回投げるたびに次の操作 (*) を行う。

(*) 表示されている整数をさいころの出た目の数で割った余り r を求め、装置に r を表示させる。

さいころを n 回投げたとき、最後に装置に表示されている整数が 0 である確率を a_n , 1 である確率を b_n , 3 である確率を c_n とする。

次の問いに答えよ。

- (1) a_1, b_1, c_1 を求めよ。
- (2) a_n, b_n, c_n を $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ を用いて表せ。
- (3) a_n, b_n, c_n を n の式で表せ。

第 5 問

関数 $f(x) = e^{ax}$ ($a > 0$) と次の条件 (ア), (イ) を満たす関数 $g(x)$ がある。

(ア) $y = g(x)$ のグラフは半円

$$\begin{cases} (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \\ y < q \end{cases}$$

である。ただし, $p < 0$, $q > 0$, $r > |p|$ とする。

(イ) $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$, $f''(0) = g''(0)$

次の問いに答えよ。

(1) p , q , r を a を用いて表せ。

(2) a がすべての正の実数を動くとき, r を最小にする a の値を求めよ。