

A2

数 学

(2013 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int e^{-x} \sin^2 x \, dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^1 \sqrt{1 + 2\sqrt{x}} \, dx$ を求めよ。

2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $A^2 = A$ を満たす。行列 B は $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$,
 $B^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす。次の問いに答えよ。

(1) $a + d$, $ad - bc$ を求めよ。

(2) B を a を用いて表せ。

(3) $c = 1$ のとき, 実数 s, t に対して

$$(sA + tB)^n = x_n A + y_n B \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と表されることを示し, x_n, y_n を s, t, n を用いて表せ。

3 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ を満たす θ に対し、 xy 平面の第 1 象限の点 P および x 軸の正の部分にある点 Q を

$$\angle QOP = \theta, \quad \angle PQO = 2\theta, \quad PQ = 1$$

を満たすようにとる。PQ の中点を R とする。 θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ の範囲を動くとき、P の軌跡を C_1 、R の軌跡を C_2 とする。O は xy 平面の原点である。次の問いに答えよ。

- (1) P, Q, R の座標を θ を用いて表せ。
- (2) C_1 , C_2 を求め、それらを図示せよ。
- (3) C_1 , C_2 および x 軸で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

4 1つの整数を表示する装置がある。最初に2013が表示されている。さいころを1回投げるたびに次の操作(*)を行う。

(*) 表示されている整数をさいころの出た目の数で割った余り r を求め、装置に r を表示させる。

さいころを n 回投げたとき、最後に装置に表示されている整数が0である確率を a_n 、1である確率を b_n 、3である確率を c_n とする。

次の問いに答えよ。

(1) a_1 , b_1 , c_1 を求めよ。

(2) a_n , b_n , c_n を a_{n-1} , b_{n-1} , c_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n , b_n , c_n を n の式で表せ。

5 関数 $f(x) = e^{ax}$ ($a > 0$) と次の条件 (ア), (イ) を満たす関数 $g(x)$ がある。

(ア) $y = g(x)$ のグラフは半円

$$\begin{cases} (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \\ y < q \end{cases}$$

である。ただし, $p < 0$, $q > 0$, $r > |p|$ とする。

(イ) $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$, $f''(0) = g''(0)$

次の問いに答えよ。

(1) p , q , r を a を用いて表せ。

(2) a がすべての正の実数を動くとき, r を最小にする a の値を求めよ。

