A 2

数　　学

（2012 年度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には，問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2+\sin x}{1+\cos x}\,dx$ を求めよ。

(2) 関数 $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-3x}$ の増減，極値を調べ，そのグラフの概形を描け。
ただし，グラフの凹凸，変曲点は調べなくてよい。

2 行列 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$Y = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ は $XY = YX$ を満たす。次の問いに答えよ。

(1) c，d を a，b を用いて表せ。

(2) $X^2 = E$，$b > 0$ のとき，X を求めよ。ただし，E は単位行列とする。

(3) xy 平面上に直線 ℓ があり，(2) で求めた行列 X の表す 1 次変換によって ℓ 上の点はすべて ℓ 上の点に移される。ℓ の方程式を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

(1) k を 0 以上の整数とするとき,

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2} \leqq k$$

を満たす 0 以上の整数 x, y の組 $(x,\ y)$ の個数を a_k とする。a_k を k の式で表せ。

(2) n を 0 以上の整数とするとき,

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+z \leqq n$$

を満たす 0 以上の整数 x, y, z の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を b_n とする。b_n を n の式で表せ。

4 次の問いに答えよ。

(1) 不定積分

$$\int x^2 \cos(a \log x)\, dx$$

を求めよ。ただし，a は 0 でない定数とする。

(2) 曲線 $y = x\cos(\log x)$ と x 軸，および 2 直線 $x = 1$，$x = e^{\frac{\pi}{4}}$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

5 鋭角三角形 ABC の $\angle$A，$\angle$B，$\angle$C の大きさをそれぞれ α，β，γ で表す。点 D，E，F はそれぞれ辺 CA，AB，BC 上にあり，DE $\perp$ AB，EF $\perp$ BC，FD $\perp$ CA を満たす。次の問いに答えよ。

(1) $\triangle$ABC と $\triangle$DEF は相似であることを示せ。

(2) $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}} = \dfrac{1}{\tan\alpha} + \dfrac{1}{\tan\beta} + \dfrac{1}{\tan\gamma}$ を示せ。

(3) α が一定のとき，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}}$ を最小にするような β，γ を α で表せ。