

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2011 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

3 次関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + k$ について、次の問いに答えよ。ただし、 k は定数とする。

- (1) $f(x)$ が極値をとるときの x を求めよ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの整数解をもつとき、 k の値およびその整数解を求めよ。

第 2 問

次の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq x \leq \pi$ において, $|\cos x| = \sin x$ を満たす x を求め, $0 \leq x \leq \pi$ において, $\cos(\cos x)$, $\cos(\sin x)$ の大小を比較せよ。
- (2) $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ のとき, $\cos \alpha > \sin \beta$ となることを示し, $0 \leq x \leq \pi$ において, $\cos(\cos x) > \sin(\sin x)$ を示せ。

第 3 問

1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ において、3 辺 OA , OB , AC 上にそれぞれ点 D , E , F を $OD = \frac{1}{2}$, $OE = t$ ($0 < t < 1$), $AF = \frac{2}{3}$ となるようにとる。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, t を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{DF}$ のとき、 t の値を求めよ。
- (3) 3 点 D , E , F が定める平面が直線 BC と交わる点を G とするとき、線分 BG の長さを t を用いて表せ。

第 4 問

xy 平面上の 2 曲線 $C_1 : y = \frac{\log x}{x}$ と $C_2 : y = ax^2$ は点 P を共有し、 P において共通の接線をもっている。ただし、 a は定数とする。次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = \frac{\log x}{x}$ の増減、極値、グラフの凹凸、変曲点を調べ、 C_1 の概形を描け。
ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ は証明なしに用いてよい。

- (2) P の座標および a の値を求めよ。

- (3) 不定積分 $\int \left(\frac{\log x}{x} \right)^2 dx$ を求めよ。

- (4) C_1 、 C_2 および x 軸で囲まれる部分を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

第 5 問

xy 平面上に直線 ℓ がある。行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換 f は、次の (i), (ii), (iii) を満たす。

- (i) 平面の点の f による像はすべて ℓ 上にある。
- (ii) f は ℓ の点をすべて原点に移す。
- (iii) 点 P が円 $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$ 上を動くとき、 f による P の像の x 座標は最大値 $1 + \sqrt{5}$, 最小値 $1 - \sqrt{5}$ をとる。

次の問いに答えよ。

- (1) A を求めよ。また ℓ の方程式を求めよ。
- (2) (iii) で最大値 $1 + \sqrt{5}$ をとるときの P の座標を求めよ。