A 2

数　　学

（2011 年度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には，問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1 3 次関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + k$ について，次の問いに答えよ。ただし，k は定数とする。

(1) $f(x)$ が極値をとるときの x を求めよ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの整数解をもつとき，k の値およびその整数解を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ において，$|\cos x| = \sin x$ を満たす x を求め，$0 \leqq x \leqq \pi$ において，$\cos(\cos x)$，$\cos(\sin x)$ の大小を比較せよ。

(2) $\alpha \geqq 0$，$\beta \geqq 0$，$\alpha + \beta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\alpha > \sin\beta$ となることを示し，$0 \leqq x \leqq \pi$ において，$\cos(\cos x) > \sin(\sin x)$ を示せ。

3 1辺の長さが1の正四面体OABCにおいて，3辺OA，OB，AC上にそれぞれ点D，E，Fを$\mathrm{OD}=\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{OE}=t$（$0<t<1$），$\mathrm{AF}=\dfrac{2}{3}$となるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$t$を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DF}}$のとき，$t$の値を求めよ。

(3) 3点D，E，Fが定める平面が直線BCと交わる点をGとするとき，線分BGの長さをtを用いて表せ。

4 xy 平面上の 2 曲線 $C_1 : y = \dfrac{\log x}{x}$ と $C_2 : y = ax^2$ は点 P を共有し，P において共通の接線をもっている。ただし，a は定数とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \dfrac{\log x}{x}$ の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，C_1 の概形を描け。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ は証明なしに用いてよい。

(2) P の座標および a の値を求めよ。

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 dx$ を求めよ。

(4) C_1，C_2 および x 軸で囲まれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

5 xy 平面上に直線 ℓ がある。行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換 f は，次の (i)，(ii)，(iii) を満たす。

(i) 平面の点の f による像はすべて ℓ 上にある。

(ii) f は ℓ の点をすべて原点に移す。

(iii) 点 P が円 $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$ 上を動くとき，f による P の像の x 座標は最大値 $1 + \sqrt{5}$，最小値 $1 - \sqrt{5}$ をとる。

次の問いに答えよ。

(1) A を求めよ。また ℓ の方程式を求めよ。

(2) (iii) で最大値 $1 + \sqrt{5}$ をとるときの P の座標を求めよ。