

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2010 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ を連続関数とするとき,

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

が成り立つことを示せ。

- (2) 定積分

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx$$

の値を求めよ。

第 2 問

1 個のいびつなさいころがある。1, 2, 3, 4 の目が出る確率はそれぞれ $\frac{p}{2}$ であり, 5, 6 の目が出る確率はそれぞれ $\frac{1-2p}{2}$ である。ただし, $0 < p < \frac{1}{2}$ とする。このさいころを投げて, xy 平面上の点 Q を次のように動かす。

- (i) 1 または 2 の目が出たときには, Q を x 軸の正の方向に 1 だけ動かす。
- (ii) 3 または 4 の目が出たときには, Q を y 軸の正の方向に 1 だけ動かす。
- (iii) 5 または 6 の目が出たときには, Q を動かさない。

Q は最初原点 $(0, 0)$ にある。このさいころを $(n+1)$ 回投げ, Q が通った点 (原点および Q の最終位置の点を含む) の集合を S とする。ただし, n は自然数とする。次の問いに答えよ。

- (1) さいころを $(n+1)$ 回投げたとき, S が点 $(1, n-1)$ を含む確率を求めよ。
- (2) さいころを $(n+1)$ 回投げたとき, S が領域 $x+y < n$ に含まれる確率を求めよ。
- (3) さいころを $(n+1)$ 回投げたとき, S が点 $(k, n-k)$ を含むならば得点 2^k 点 ($k = 0, 1, \dots, n$) が与えられ, S が領域 $x+y < n$ に含まれるならば得点 0 点が与えられるとする。得点の期待値を求めよ。

第 3 問

次の問いに答えよ。

- (1) $0 < x < \pi$ のとき,

$$\sin x - x \cos x > 0$$

を示せ。

- (2) 定積分

$$I = \int_0^{\pi} |\sin x - ax| dx \quad (0 < a < 1)$$

を最小にする a の値を求めよ。

第 4 問

a, b を正の実数とする。曲線

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$$

は領域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ に含まれている。次の問いに答えよ。

- (1) (a, b) が存在する範囲を ab 平面上に図示せよ。
- (2) C が囲む部分の面積が最大になるときの a, b の値を求めよ。

第 5 問

各項が正の実数である数列 $\{a_n\}$ が, $a_1 = 1$ と関係式

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{a_n + a_{n+1}} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたしている。次の問いに答えよ。

- (1) $a_n \geq \sqrt{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。
- (2) $\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} \leq \frac{2}{3} \left(n^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) を示せ。
- (3) $a_n \leq \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} n - \frac{1}{6}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。