

A 2

数 学

(2010 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を連続関数とするとき,

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

が成り立つことを示せ。

(2) 定積分

$$\int_0^\pi \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx$$

の値を求めよ。

2 1 個のいびつなさいころがある。1, 2, 3, 4 の目が出る確率はそれぞれ $\frac{p}{2}$ であり, 5, 6 の目が出る確率はそれぞれ $\frac{1-2p}{2}$ である。ただし, $0 < p < \frac{1}{2}$ とする。このさいころを投げて, xy 平面上の点 Q を次のように動かす。

- (i) 1 または 2 の目が出たときには, Q を x 軸の正の方向に 1 だけ動かす。
- (ii) 3 または 4 の目が出たときには, Q を y 軸の正の方向に 1 だけ動かす。
- (iii) 5 または 6 の目が出たときには, Q を動かさない。

Q は最初原点 $(0, 0)$ にある。このさいころを $(n+1)$ 回投げ, Q が通った点 (原点および Q の最終位置の点を含む) の集合を S とする。ただし, n は自然数とする。次の問いに答えよ。

- (1) さいころを $(n+1)$ 回投げたとき, S が点 $(1, n-1)$ を含む確率を求めよ。
- (2) さいころを $(n+1)$ 回投げたとき, S が領域 $x+y < n$ に含まれる確率を求めよ。
- (3) さいころを $(n+1)$ 回投げたとき, S が点 $(k, n-k)$ を含むならば得点 2^k 点 ($k = 0, 1, \dots, n$) が与えられ, S が領域 $x+y < n$ に含まれるならば得点 0 点を与えられるとする。得点の期待値を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

(1) $0 < x < \pi$ のとき,

$$\sin x - x \cos x > 0$$

を示せ。

(2) 定積分

$$I = \int_0^{\pi} |\sin x - ax| dx \quad (0 < a < 1)$$

を最小にする a の値を求めよ。

4 a, b を正の実数とする。曲線

$$C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$$

は領域 $D : x^2 + y^2 \leq 1$ に含まれている。次の問いに答えよ。

- (1) (a, b) が存在する範囲を ab 平面上に図示せよ。
- (2) C が囲む部分の面積が最大になるときの a, b の値を求めよ。

5 各項が正の実数である数列 $\{a_n\}$ が, $a_1 = 1$ と関係式

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{a_n + a_{n+1}} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたしている。次の問いに答えよ。

(1) $a_n \geq \sqrt{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。

(2) $\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} \leq \frac{2}{3} \left(n^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) を示せ。

(3) $a_n \leq \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} n - \frac{1}{6}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。

