

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2009 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_1^e x^{\frac{1}{n}} \log x \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を求めよ。

(2) 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_1^e x^{\frac{1}{n}} \log x \, dx - 1 \right)$$

を求めよ。

第 2 問

xy 平面上に曲線 $C : y = x^2$ がある。 C 上の点 $P(t, t^2)$ を次の条件 (*) をみたすようにとる。

(*) P 以外の C 上の異なる 2 点 Q, R があり, そこでの C の法線がともに P を通る。

$Q(\alpha, \alpha^2), R(\beta, \beta^2)$ ($\alpha < \beta$) とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) t のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) t が (1) で求めた範囲を動くとき, 線分 QR の中点 M が描く軌跡の方程式を求めよ。
- (3) β を t の式で表し, 極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} t\beta$ を求めよ。

第 3 問

赤, 青, 黄の 3 色を用いて, 横一列に並んだ n 個のマス, 隣り合うマスは異なる色になるように塗り分ける。ただし, 使わない色があってもよい。両端のマスが同じ色になる場合の数を a_n とし, 両端のマスが異なる色になる場合の数を b_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) a_3, b_3, a_4, b_4 を求めよ。
- (2) a_n, b_n ($n \geq 3$) を n の式で表せ。

第 4 問

xy 平面上に円 $C : x^2 + y^2 = 1$ がある。 C の外部の点 $P(s, t)$ ($s \neq \pm 1$) から C へ引いた 2 つの接線と直線 $x = 1$ との交点を Q, R とする。次の問いに答えよ。

- (1) 線分 QR の長さを s, t を用いて表せ。
- (2) QR の長さが 1 であるように P が動くとき、 P の軌跡を求め、図示せよ。

第 5 問

平面上に 3 点 O, A, B があり, $OA = a, OB = b$ ($0 < a < b$) で, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角 θ は $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ をみたす。点 C を $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ で定める。また, O から引いた半直線 OA 上に, 点 P を $OA < OP$ となるようにとる。直線 PC と直線 OB の交点を Q とする。 $AP = x, PQ^2 = f(x)$ とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ を x と a, b, θ を用いて表せ。
- (2) 第 2 次導関数 $f''(x)$ は, $x > 0$ のとき $f''(x) > 0$ をみたすことを示せ。
- (3) $a = 1, b = \sqrt{6}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{6}}$ のとき, PQ の長さの最小値を求めよ。