A 2

数　　学

（2009 年度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には，問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_1^e x^{\frac{1}{n}} \log x \, dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を求めよ。

(2) 極限

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\int_1^e x^{\frac{1}{n}} \log x \, dx - 1 \right)$$

を求めよ。

2 xy 平面上に曲線 $C : y = x^2$ がある。C 上の点 $\mathrm{P}\,(t,\ t^2)$ を次の条件 $(*)$ をみたすようにとる。

$(*)$　P 以外の C 上の異なる 2 点 Q，R があり，そこでの C の法線がともに P を通る。

$\mathrm{Q}\,(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}\,(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha < \beta)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) t が (1) で求めた範囲を動くとき，線分 QR の中点 M が描く軌跡の方程式を求めよ。

(3) β を t の式で表し，極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t\beta$ を求めよ。

3 赤，青，黄の 3 色を用いて，横一列に並んだ n 個のマスを，隣り合うマスは異なる色になるように塗り分ける。ただし，使わない色があってもよい。両端のマスが同じ色になる場合の数を a_n とし，両端のマスが異なる色になる場合の数を b_n とする。次の問いに答えよ。

(1) a_3，b_3，a_4，b_4 を求めよ。

(2) a_n，b_n $(n \geqq 3)$ を n の式で表せ。

4 xy 平面上に円 $C : x^2 + y^2 = 1$ がある。C の外部の点 $\mathrm{P}\,(s,\ t)$ $(s \neq \pm 1)$ から C へ引いた 2 つの接線と直線 $x = 1$ との交点を Q，R とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 QR の長さを s，t を用いて表せ。

(2) QR の長さが 1 であるように P が動くとき，P の軌跡を求め，図示せよ。

5 平面上に3点O，A，Bがあり，$\mathrm{OA}=a$，$\mathrm{OB}=b$ $(0<a<b)$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ は $0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ をみたす。点Cを $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定める。また，Oから引いた半直線OA上に，点PをOA < OPとなるようにとる。直線PCと直線OBの交点をQとする。$\mathrm{AP}=x$，$\mathrm{PQ}^2=f(x)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を x と a，b，θ を用いて表せ。

(2) 第2次導関数 $f''(x)$ は，$x>0$ のとき $f''(x)>0$ をみたすことを示せ。

(3) $a=1$，$b=\sqrt{6}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ のとき，PQの長さの最小値を求めよ。