

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2008 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

次の問いに答えよ。

(1) 不定積分

$$\int \sqrt{1 - e^{-2x}} dx$$

を置換 $\sqrt{1 - e^{-2x}} = t$ を用いて求めよ。

(2) 極限

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \left(1 - \sqrt{1 - e^{-2x}}\right) dx$$

を求めよ。

第 2 問

xy 平面上に 3 つの曲線

$$C_1 : y = x^2$$

$$C_2 : y = 2(x-1)^2 + 3$$

$$C_3 : y = -(x-a)^2 + b \quad (a, b \text{ は実数})$$

がある。 C_2 と C_3 はただ 1 つの点を共有している。次の問いに答えよ。

- (1) C_1, C_2 は共有点をもたないことを示せ。
- (2) b を a の式で表せ。
- (3) C_1 と C_3 で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。 $S(a)$ を最小にする a を求めよ。

第 3 問

原点を O とする xy 平面上に, 2 直線

$$\ell_1 : y = mx$$

$$\ell_2 : y = -mx$$

がある。ただし, $m > 1$ とする。 ℓ_1 上に点 $P(s, ms)$, ℓ_2 上に点 $Q(t, -mt)$ を $s \neq 0$, $t \neq 0$ となるようにとる。 P を通り ℓ_1 に垂直な直線と, Q を通り ℓ_2 に垂直な直線の交点を R とする。次の問いに答えよ。

- (1) R の座標を求めよ。
- (2) PQ と OR が平行となるように P , Q を動かすとき, R の軌跡を求めよ。

第 4 問

連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

の表す図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

第 5 問

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = 1 - a_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

- (1) $0 < a_{2n-1} \leq \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} \leq a_{2n} < 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)であることを示せ。
- (2) x が $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき、関数 $f(x) = 2x - x^3$ のとる値の範囲を求めよ。
- (3) $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} \leq \frac{7}{8}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)であることを示せ。