

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2007 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin x}$$

$$(2) \int_{\frac{4}{3}}^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x-1}}$$

第 2 問

xy 平面上に、直線 $\ell: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ がある。ただし、 a, b は正の定数である。曲線 $C: \frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1$ がつねに ℓ に接しているように正の実数 u, v を変化させる。 C で囲まれる部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を V とする。次の問いに答えよ。

- (1) v^2 を a, b, u を用いて表せ。
- (2) V の最大値を、 a, b を用いて表せ。また、そのときの C の方程式を a, b を用いて表せ。

第 3 問

xy 平面上に、 $b < a^2$ をみたす点 $A(a, b)$ がある。曲線 $C: y = x^2$ 上に点 P をとり、線分 AP を $k:k-1$ ($k > 1$) に外分する点を Q とする。 P が C 上を動くときにできる Q の軌跡を C' とする。次の問いに答えよ。

- (1) C' の方程式を求めよ。
- (2) C と C' は 2 つの点で交わることを示し、 C と C' で囲まれる部分の面積を求めよ。

第 4 問

a, b は実数とする。関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ が極大値と極小値をもつ。次の問いに答えよ。

- (1) 極大値が正で、極小値が負で、かつ極大値と極小値の和が負となる点 (a, b) の範囲を図示せよ。
- (2) 極大値が 1 で、極小値が -1 であるような点 (a, b) をすべて求めよ。

第 5 問

座標平面上に、ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ がある。座標平面上のベクトル $\vec{p}$ のうち、 $\sum_{k=1}^n k \left| \vec{p} - \vec{u}_k \right|^2$ を最小にするものを $\vec{v}$ とし、そのときの最小値を m とする。次の問いに答えよ。

(1) $\vec{v}$ を $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ を用いて表せ。

以下、 $\vec{u}_k = \left(\cos \frac{k\alpha}{n}, \sin \frac{k\alpha}{n} \right)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) の場合を考える。ただし、 α は正の定数とする。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \vec{v} \right|^2$ を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n^2}$ を求めよ。