

A 2

数 学

(2007 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin x}$$

$$(2) \int_{\frac{4}{3}}^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x-1}}$$

2 xy 平面上に、直線 $\ell: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ がある。ただし、 a, b は正の定数である。曲線 $C: \frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1$ がつねに ℓ に接しているように正の実数 u, v を変化させる。 C で囲まれる部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を V とする。次の問いに答えよ。

(1) v^2 を a, b, u を用いて表せ。

(2) V の最大値を、 a, b を用いて表せ。また、そのときの C の方程式を a, b を用いて表せ。

3 xy 平面上に、 $b < a^2$ をみたす点 $A(a, b)$ がある。曲線 $C: y = x^2$ 上に点 P をとり、線分 AP を $k:k-1$ ($k > 1$) に外分する点を Q とする。 P が C 上を動くときにできる Q の軌跡を C' とする。次の問いに答えよ。

(1) C' の方程式を求めよ。

(2) C と C' は 2 つの点で交わることを示し、 C と C' で囲まれる部分の面積を求めよ。

4 a, b は実数とする。関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ が極大値と極小値をもつ。次の問いに答えよ。

(1) 極大値が正で、極小値が負で、かつ極大値と極小値の和が負となる点 (a, b) の範囲を図示せよ。

(2) 極大値が 1 で、極小値が -1 であるような点 (a, b) をすべて求めよ。

5 座標平面上に、ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ がある。座標平面上のベクトル $\vec{p}$ のうち、 $\sum_{k=1}^n k \left| \vec{p} - \vec{u}_k \right|^2$ を最小にするものを $\vec{v}$ とし、そのときの最小値を m とする。次の問いに答えよ。

(1) $\vec{v}$ を $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ を用いて表せ。

以下、 $\vec{u}_k = \left(\cos \frac{k\alpha}{n}, \sin \frac{k\alpha}{n} \right)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) の場合を考える。ただし、 α は正の定数とする。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \vec{v} \right|^2$ を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n^2}$ を求めよ。

