

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2006 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_1^e x(\log x)^2 dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x}$$

第 2 問

a を $\frac{1}{2} < a < 1$ を満たす定数とする。関数

$$f(x) = a \log(1+x) + (1-a) \log(1-x) \quad (-1 < x < 1)$$

に対して、 $y = f(x)$ のグラフを C とする。次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の増減、凹凸を調べ、 C の概形を描け。
- (2) C と x 軸が $x = \frac{1}{2}$ で交わる時、 a の値を求めよ。
- (3) (2) で求めた a に対し、 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

第 3 問

xy 平面上に、定点 $A(0, 3)$ 、直線 $\ell: (\cos \theta)x + (\sin \theta)y = k$ および円 $C: x^2 + y^2 = 2$ がある。ただし、 $0 \leq k < \sqrt{2}$ 、 $0 \leq \theta < 2\pi$ 、 $3 \sin \theta \neq k$ とする。 ℓ と C の 2 交点を P 、 Q とし、 $\triangle APQ$ の面積を S とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) S を k 、 θ で表せ。
- (2) k を固定し、 θ を動かしたときの S の最大値を $f(k)$ とする。 $f(k)$ を求めよ。
- (3) (2) で求めた $f(k)$ を最大にする k の値を求めよ。

第 4 問

xy 平面上の $x \geq 0$ の範囲で、直線 $y = x$ と曲線 $y = x^n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) により囲まれる部分を D とする。 D を直線 $y = x$ のまわりに回転してできる回転体の体積を V_n とするとき、次の問いに答えよ。

(1) V_n を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ を求めよ。

第 5 問

a を正の数とすると、2 曲線 $y = \cos x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と $y = a \sin x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ および y 軸で囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) a を S で表せ。

(2) n を 2 以上の整数とすると

$$\log n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \log n$$

であることを示せ。

(3) 2 以上の整数 n に対し、 E_n を次のように定める。

$k = 1, 2, \dots, n-1$ の各 k に対し、 $S = \frac{k}{n}$ のときの a を a_k とおき、 $E_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ とする。
このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{\log n}$$

を求めよ。