A 2

数　　学

（2006 年度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には，問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^e x(\log x)^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$

2 a を $\dfrac{1}{2} < a < 1$ を満たす定数とする。関数

$$f(x) = a\log(1+x) + (1-a)\log(1-x) \qquad (-1 < x < 1)$$

に対して，$y = f(x)$ のグラフを C とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の増減，凹凸を調べ，C の概形を描け。

(2) C と x 軸が $x = \dfrac{1}{2}$ で交わるとき，a の値を求めよ。

(3) (2) で求めた a に対し，C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

3 xy 平面上に，定点 A$(0,\ 3)$，直線 $\ell : (\cos\theta)x + (\sin\theta)y = k$ および円 $C : x^2 + y^2 = 2$ がある。ただし，$0 \leqq k < \sqrt{2}$，$0 \leqq \theta < 2\pi$，$3\sin\theta \neq k$ とする。ℓ と C の 2 交点を P，Q とし，△APQ の面積を S とするとき，次の問いに答えよ。

(1) S を k，θ で表せ。

(2) k を固定し，θ を動かしたときの S の最大値を $f(k)$ とする。$f(k)$ を求めよ。

(3) (2) で求めた $f(k)$ を最大にする k の値を求めよ。

4 xy 平面上の $x \geqq 0$ の範囲で，直線 $y = x$ と曲線 $y = x^n$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ により囲まれる部分を D とする。D を直線 $y = x$ のまわりに回転してできる回転体の体積を V_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1) V_n を求めよ。

(2) $\lim_{n \to \infty} V_n$ を求めよ。

5 a を正の数とするとき，2 曲線 $y = \cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y = a \sin x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ および y 軸で囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) a を S で表せ。

(2) n を 2 以上の整数とするとき

$$\log n \leqq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqq 1 + \log n$$

であることを示せ。

(3) 2 以上の整数 n に対し，E_n を次のように定める。

$k = 1, 2, \cdots, n-1$ の各 k に対し，$S = \dfrac{k}{n}$ のときの a を a_k とおき，$E_n = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k$ とする。

このとき

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E_n}{\log n}$$

を求めよ。