

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2005 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

xy 平面上に楕円 $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ がある。ただし, a, b を異なる正の定数とする。 C に接し, 傾き t の直線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

- (1) ℓ の方程式を求めよ。
- (2) 原点と ℓ の距離を求めよ。
- (3) C に外接する長方形の 1 辺の傾きが t であるとき, この長方形の面積を $S(t)$ とする。 $S(t)$ を求めよ。
- (4) t がすべての実数を動くとき, (3) で得られた $S(t)$ の値の範囲を求めよ。

第 2 問

p を素数とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、 p^n を分母とする既約分数で、 0 より大きく 1 より小さいものの総和を S_n とする。次の問いに答えよ。

(1) S_1, S_2, S_3 を求めよ。

(2) S_n を求めよ。

第 3 問

点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{8}\right)$ を通る傾き t の直線 ℓ と曲線 $C: y = x^2$ の 2 交点を $P(\alpha, \alpha^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$ ($\alpha < \beta$) とする。 C 上に点 $R(\gamma, \gamma^2)$ ($\alpha < \gamma < \beta$) をとり, $\triangle PQR$ を ℓ のまわりに 1 回転してできる立体を考える。 R を動かすとき, この立体の体積の最大値を V とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\alpha + \beta, \alpha\beta$ を t の式で表せ。
- (2) V を t の式で表せ。
- (3) t がすべての実数を動くとき, V を最小にする t の値を求めよ。

第 4 問

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=1}^n (\log k)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int (\log x)^2 dx$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n(\log n)^2}$ を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{3n}}{a_{2n}}$ を求めよ。

第 5 問

平面上に半径 $\frac{1}{2^n}$ の円 C_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) があり, 次の条件をみたしている。

(a) すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, C_0 と C_n は外接する。

(b) すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, C_n と C_{n+1} は外接する。

C_n の中心を P_n とし, $\angle P_n P_0 P_{n+1}$ を θ_n ($0 < \theta_n < \pi$) で表す。次の問いに答えよ。

(1) $0 \leq \theta < \pi$ のとき, $\frac{1}{2}\theta \leq \tan \frac{\theta}{2}$ であることを示せ。

(2) $\cos \theta_n$ を n の式で表せ。

(3) $\tan \frac{\theta_n}{2} \leq \frac{1}{2^n \sqrt{2}}$ であることを示せ。

(4) $\sum_{k=1}^n \theta_k \leq \sqrt{2}$ であることを示せ。