

A 2

数 学

(2005 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 xy 平面上に楕円 $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ がある。ただし, a, b を異なる正の定数とする。 C に接し, 傾き t の直線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) 原点と ℓ の距離を求めよ。

(3) C に外接する長方形の 1 辺の傾きが t であるとき, この長方形の面積を $S(t)$ とする。 $S(t)$ を求めよ。

(4) t がすべての実数を動くとき, (3) で得られた $S(t)$ の値の範囲を求めよ。

2 p を素数とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、 p^n を分母とする既約分数で、 0 より大きく 1 より小さいものの総和を S_n とする。次の問いに答えよ。

(1) S_1, S_2, S_3 を求めよ。

(2) S_n を求めよ。

3 点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{8}\right)$ を通る傾き t の直線 ℓ と曲線 $C : y = x^2$ の 2 交点を $P(\alpha, \alpha^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$ ($\alpha < \beta$) とする。 C 上に点 $R(\gamma, \gamma^2)$ ($\alpha < \gamma < \beta$) をとり、 $\triangle PQR$ を ℓ のまわりに 1 回転してできる立体を考える。 R を動かすとき、この立体の体積の最大値を V とする。次の問いに答えよ。

(1) $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ を t の式で表せ。

(2) V を t の式で表せ。

(3) t がすべての実数を動くとき、 V を最小にする t の値を求めよ。

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=1}^n (\log k)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int (\log x)^2 dx$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n(\log n)^2}$ を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{3n}}{a_{2n}}$ を求めよ。

5 平面上に半径 $\frac{1}{2^n}$ の円 C_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) があり, 次の条件をみたしている。

(a) すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, C_0 と C_n は外接する。

(b) すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, C_n と C_{n+1} は外接する。

C_n の中心を P_n とし, $\angle P_n P_0 P_{n+1}$ を θ_n ($0 < \theta_n < \pi$) で表す。次の問いに答えよ。

(1) $0 \leq \theta < \pi$ のとき, $\frac{1}{2}\theta \leq \tan \frac{\theta}{2}$ であることを示せ。

(2) $\cos \theta_n$ を n の式で表せ。

(3) $\tan \frac{\theta_n}{2} \leq \frac{1}{2^n \sqrt{2}}$ であることを示せ。

(4) $\sum_{k=1}^n \theta_k \leq \sqrt{2}$ であることを示せ。

