

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（理系）

対象年度：2004年

試験時間：150分

問題数：5問

第 1 問

関数 $f(x) = x(1-x)e^{-x}$ に対して, $y = f(x)$ の表す曲線を C とする。次の問いに答えよ。

- (1) C の概形を描け。 C の凹凸も調べる。ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ を証明なしに用いてもよい。
- (2) 原点 $(0, 0)$ を通り, 原点以外の点で C に接する直線を ℓ とする。 C と ℓ で囲まれる図形の面積を求めよ。

第 2 問

O を原点とする xy 平面上に円 $C : (x - 1)^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) がある。 C 上の点 P (ただし, $r = 1$ のときは, P は O ではないとする) に対して, O を端点とし P を通る半直線上に

$$OP \cdot OQ = 3$$

をみたす点 Q を定める。 P が C 上を (ただし, $r = 1$ のときは O を除いて) 動くとき, Q が描く軌跡を T とする。次の問いに答えよ。

- (1) $r = 1$ のときの T の方程式を求めよ。
- (2) $r \neq 1$ のとき, T は円であることを示し, その中心と半径を求めよ。

第 3 問

異なる複素数 α, β, γ が

$$2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma = 0$$

をみたすとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の値を求めよ。
- (2) 複素数平面上で、3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ はどのような三角形か。
- (3) α, β, γ が x の 3 次方程式

$$x^3 + kx + 20 = 0 \quad (k \text{ は実数の定数})$$

の解であるとき、 α, β, γ および k を求めよ。

第 4 問

三角形 ABC があり辺 AB を $k:1$ ($k > 1$) に外分する点を D とする。辺 AC を $x:1$ ($x > 0$) に内分する点を P とし、線分 PD と辺 BC の交点を Q とする。面積比 $\frac{\triangle PBQ}{\triangle ABC}$ を $f(x)$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, k , x で表せ。
- (2) $f(x)$ を求めよ。
- (3) x が $x > 0$ の範囲を動くとき、 $f(x)$ を最大にする x を k で表せ。

第 5 問

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。半径 $\frac{1}{n}$ (n は自然数) の円 C_n が、 C に外接しながらすべることなく反時計回りに転がるとき、 C_n 上の点 P の軌跡を考える。ただし、最初 P は点 $A(1, 0)$ に一致していたとする。次の問いに答えよ。

- (1) O を端点とし C_n の中心を通る半直線が x 軸の正の向きとなす角が θ となるときの P の座標を n と θ で表せ。
- (2) P がはじめて A に戻るまでの P の軌跡の長さ l_n を求めよ。
- (3) (2) で求めた l_n に対し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$ を求めよ。