

A 2

数 学

(2004 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 関数 $f(x) = x(1-x)e^{-x}$ に対して、 $y = f(x)$ の表す曲線を C とする。次の問いに答えよ。

(1) C の概形を描け。 C の凹凸も調べること。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ を証明なしに用いてもよい。

(2) 原点 $(0, 0)$ を通り、原点以外の点で C に接する直線を ℓ とする。 C と ℓ で囲まれる図形の面積を求めよ。

2 O を原点とする xy 平面上に円 $C : (x-1)^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) がある。 C 上の点 P (ただし, $r = 1$ のときは, P は O ではないとする) に対して, O を端点とし P を通る半直線上に

$$OP \cdot OQ = 3$$

をみたす点 Q を定める。 P が C 上を (ただし, $r = 1$ のときは O を除いて) 動くとき, Q が描く軌跡を T とする。次の問いに答えよ。

(1) $r = 1$ のときの T の方程式を求めよ。

(2) $r \neq 1$ のとき, T は円であることを示し, その中心と半径を求めよ。

3 異なる複素数 α, β, γ が

$$2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma = 0$$

をみたすとき、次の問いに答えよ。

(1) $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の値を求めよ。

(2) 複素数平面上で、3点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

(3) α, β, γ が x の3次方程式

$$x^3 + kx + 20 = 0 \quad (k \text{ は実数の定数})$$

の解であるとき、 α, β, γ および k を求めよ。

4 三角形 ABC があり辺 AB を $k : 1$ ($k > 1$) に外分する点を D とする。辺 AC を $x : 1$ ($x > 0$) に内分する点を P とし、線分 PD と辺 BC の交点を Q とする。面積比 $\frac{\triangle PBQ}{\triangle ABC}$ を $f(x)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, k , x で表せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) x が $x > 0$ の範囲を動くとき、 $f(x)$ を最大にする x を k で表せ。

5 xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。半径 $\frac{1}{n}$ (n は自然数) の円 C_n が, C に外接しながらすべることなく反時計回りに転がるとき, C_n 上の点 P の軌跡を考える。ただし, 最初 P は点 $A(1, 0)$ に一致していたとする。次の問いに答えよ。

(1) O を端点とし C_n の中心を通る半直線が x 軸の正の向きとなす角が θ となるときの P の座標を n と θ で表せ。

(2) P がはじめて A に戻るまでの P の軌跡の長さ l_n を求めよ。

(3) (2) で求めた l_n に対し, $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$ を求めよ。

