A 2

数　　学

（2003 年度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には，問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_1^e 5^{\log x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

2 △ABC において

$$a = \mathrm{BC}, \quad b = \mathrm{CA}, \quad c = \mathrm{AB}$$

と表す。次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\tan \mathrm{A}}{a^2} = \dfrac{\tan \mathrm{B}}{b^2}$ が成り立つ △ABC はどのような三角形か。

(2) $b = \dfrac{a+c}{2}$ が成り立つ △ABC に対し

$$\tan \frac{\mathrm{A}}{2} \tan \frac{\mathrm{C}}{2}$$

の値を求めよ。

3 xy 平面上に曲線 $C : y = x^2 + 1$ がある。点 $(1,\ 3)$ を通る傾き t の直線と C との 2 つの交点の x 座標を α および β（$\alpha < \beta$）とする。曲線 C，x 軸，直線 $x = \alpha$ および直線 $x = \beta$ で囲まれた図形の面積を S で表す。次の問いに答えよ。

(1) S を t を用いて表せ。

(2) S を最小とする t の値を求めよ。

4 数列 $\{a_n\}$ は

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{2n+1} = a_{2n} = a_n + n \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots) \end{cases}$$

を満たす。次の問いに答えよ。

(1) $a_2,\, a_3,\, a_4,\, \cdots,\, a_8$ を求めよ。

(2) $n = 2^m$ $(m = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots)$ のとき，a_n を m を用いて表せ。

(3) $n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots$ に対して

$$a_n < n$$

であることを証明せよ。

5 xy 平面上に次の式で与えられる曲線 C がある。

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} \qquad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

C 上の点で x 座標が最大となる点を $(x_0,\ y_0)$ とする。

(1) x_0，y_0 を求めよ。

(2) 曲線 C の長さを求めよ。

(3) 曲線 C，直線 $x = x_0$ および x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。