A 2

数　　学

（2002 年度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には，問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1 xy 平面上に原点 O と点 A$(1,\ 1)$，B$(1,\ -1)$ を頂点とする △OAB がある。△OAB の周上の異なる 2 点 P，Q は線分 PQ が △OAB の面積を二等分するように動く。PQ の中点の軌跡を求め図示せよ。

2 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_{n+2} = 1 - |a_{n+1}| + a_n \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

を満たすものとする。次の問いに答えよ。

(1) $a_1 = 0$，$a_2 = 1$ のとき，a_{100} を求めよ。

(2) $a_1 = 2$，$a_2 = 2$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ であることを示せ。

(3) a_1，a_2 は $|a_1| \leqq 2$，$|a_2| \leqq 2$ を満たす整数とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とならない a_1，a_2 の組をすべて求めよ。

3 a を正の定数とし，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}(1-x)^n \qquad \left(\frac{a-1}{a} < x < \frac{a+1}{a}\right)$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。ただし，$|r| < 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であることを用いてもよい。

(2) 方程式

$$f(x) - \frac{1}{a(ax-a+1)} - m = 0$$

が異なる 2 つの実数解をもつような実数 m の範囲を求めよ。

4 実数 α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ を満たすとする。xy 平面上に原点 O を中心とする半径 $\cos\alpha$ の円 A と，点 F $(\sin\alpha,\ 0)$ がある。A の周上に点 P をとり，P で A に内接し F を通る円を B とする。P が A の周上を動くとき，B の中心の軌跡を C とする。次の問いに答えよ。

(1) C を x，y の方程式で表せ。

(2) C の極方程式を求めよ。

(3) P が A の周上を，点 Q は C 上を動くときの PQ の最大値を $f(\alpha)$ とする。α が $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動くとき，$f(\alpha)$ のとり得る値の範囲を求めよ。

5 x の多項式 $f(x)$ で，$f(0)=0$ かつ $f(1)=f(-1)$ を満たすものすべての集合を M とする。定数 a, b, c, d に対し，$g(x)=x^2+ax+b$, $h(x)=x^3+cx+d$ が M の要素であるとき，次の問いに答えよ。

(1) a，b，c，d を求めよ。

(2) M の任意の要素は，次の形の多項式をいくつか加え合わせたもので表せることを示せ。

$$k(g(x))^m(h(x))^n$$

ただし，k は定数，m, n は 0 以上の整数であり，$(g(x))^0=1$, $(h(x))^0=1$ とする。