A 2

数　　学

（2001 年度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には，問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ のとき，不等式

$$\log(1+x) \geqq \frac{x}{1+x}$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) 定積分

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$$

を求めよ。

2 a，b は実数とする。x の方程式

$$|x^2+ax+b|=|x^2+bx+a|$$

の異なる実数解の個数を n とする。次の問いに答えよ。

(1) $n=1$ となる点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。

(2) $n=2$ であるとき，この方程式の実数解を求めよ。

3 平面上に円 $C : x^2 + y^2 = 1$ がある。点 $\mathrm{P}\,(0,\ -k)$ を通り，x 軸の正の向きとのなす角が θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ である直線と C との交点を X，Y とする。ただし，k は $0 < k < 1$ を満たす定数である。次の問いに答えよ。

(1) 線分 XY の長さを求めよ。

(2) 2 点 X，Y を除いた C 上を点 Z が動くときの △XYZ の面積の最大値を S とする。S を求めよ。

(3) θ を動かすとき，(2) で求めた S が最大となるときの $\cos\theta$ を求めよ。

4 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$
$$a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1} \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

により定まる。次の問いに答えよ。

(1) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $(n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) m を自然数とするとき，a_{6m} は 8 の倍数であることを示せ。

5 曲線 $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ の極方程式を $r = f(\theta)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(\theta)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{3}{4}\pi + 0} f(\theta) \sin\left(\theta - \frac{3}{4}\pi\right)$ を求めよ。

(3) $\tan\theta = t$ とおき，置換積分法を使って $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{f(\theta)\}^2 d\theta$ を求めよ。