A 2

数　　学

（2000 年度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には，問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^3\, 2^{x^2}\, dx$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log x}{(1+x)^2}\, dx$

2 xy 平面上に曲線

$$C : \begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \qquad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

がある。C 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}\,(2\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ および $\mathrm{Q}\,(2\cos\beta,\ \sin\beta)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) 点 P における C の法線の方程式を求めよ。

(2) 点 P における C の法線と点 Q における C の法線の交点の座標を $(s,\ t)$ とし，

$$u = \lim_{\beta \to \alpha} s, \quad v = \lim_{\beta \to \alpha} t$$

とするとき，u，v を α の式で表せ。

3 実数 t に対して，$0 \leqq x \leqq 2$ における $\left| x^3 - 3tx^2 - \dfrac{3}{4} \right|$ の最大値を $f(t)$ とする。このとき，$f(t)$ を t の式で表し，そのグラフをかけ。

4 複素数平面上で，点 1 と点 i を結ぶ線分を ℓ とする。ただし，i は虚数単位で，点 1 と点 i は ℓ に含まれる。点 α と点 β が ℓ 上を動くとき，点 $\alpha\beta$ の動く範囲を D とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 $x+yi$（x，y は実数）が D に含まれるための x，y の条件を求めよ。

(2) D を図示せよ。

5 $f(x) = \dfrac{x}{1+x+x\sqrt{x}}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ でつねに増加することを示せ。

(2) $\dfrac{1}{(\sqrt{n}+1)^2} \leqq a_n \leqq \dfrac{1}{n}$ （$n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots$）が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} a_k$ を求めよ。