

A 1

数 学

(2024 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 正の整数 n に対し, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 2^n x + 8$$

と定義する。 x についての方程式 $f(x) = 0$ が 3 つの実数解 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$) をもち, そのうちの 1 つが負の整数であるとする。次の問いに答えよ。

(1) n , および α, β, γ を求めよ。

(2) $\int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx$ を求めよ。

2 xyz 空間内に、2 点 $P(1, 2, 3)$, $Q(4, -4, 9)$ を通る直線 ℓ がある。点 $A(9, 1, 7)$ から ℓ にひいた垂線と ℓ との交点を H とする。また、 ℓ と点 $B(1, 2, -15)$ を含む平面を α とする。次の問いに答えよ。

- (1) H の座標, および線分 HA の長さを求めよ。
- (2) 以下の 2 つの条件をともにみたす, 平面 α 上の点 C の座標をすべて求めよ。

$$\text{直線 } HC \perp \ell, \quad HC = HA$$

3 m, n を実数とする。 xy 平面上に直線 $\ell: y = mx + n$ と曲線 $C: y = x^3 - 3x^2$ があり、 ℓ と C は異なる 3 点で交わっている。各交点の x 座標を a, b, c ($a < b < c$) とおく。

以下、 $b = \frac{a+c}{2}$ が成り立つとする。次の問いに答えよ。

(1) b の値を求めよ。

(2) m, n をそれぞれ a を用いて表せ。また、 a の取りうる値の範囲を求めよ。

ℓ の傾き m を $\tan \alpha$ ($-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$) とし、 C 上の点 $(a, a^3 - 3a^2)$ における C の接線 ℓ' の傾きを $\tan \beta$ ($-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$) とする。

(3) $\frac{1}{\tan(\beta - \alpha)}$ を a を用いて表せ。

(4) a が (2) で求めた範囲にあるとき、 $\frac{1}{\tan(\beta - \alpha)}$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

