

A 1

数 学

(2023 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 xy 平面上に 2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2 + 2x$$

$$C_2 : y = -2x^2 + 2x$$

がある。次の問いに答えよ。

- (1) C_1 と C_2 のどちらにも接する直線が 1 つだけ存在することを示し、その直線の方程式を求めよ。

上で求めた直線を ℓ とする。さらに、実数 a, b に対して定まる直線 $m : y = ax + b$ が、次の 2 つの条件を満たすとする。

- m は ℓ と垂直に交わる。
- 和集合 $\{P \mid P \text{ は } m \text{ と } C_1 \text{ との共有点}\} \cup \{Q \mid Q \text{ は } m \text{ と } C_2 \text{ との共有点}\}$ の要素の個数がちょうど 4 である。

- (2) b のとり得る値の範囲を求めよ。

- (3) m と C_1 で囲まれた部分の面積を S_1 とし、 m と C_2 で囲まれた部分の面積を S_2 とする。 $S_1 : S_2 = 1 : 2$ を満たす b の値を求めよ。

2 さいころ A とさいころ B がある。はじめに、さいころ A を 2 回投げ、1 回目に出た目を a_1 、2 回目に出た目を a_2 とする。次に、さいころ B を 2 回投げ、1 回目に出た目を b_1 、2 回目に出た目を b_2 とする。次の問いに答えよ。

(1) $a_1 \geq b_1 + b_2$ となる確率を求めよ。

(2) $a_1 + a_2 > b_1 + b_2$ となる確率を求めよ。

(3) $a_1 + a_2 > b_1 + b_2$ という条件のもとで、 $a_2 = 1$ となる条件付き確率を求めよ。

3 四面体 OABC があり, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とし, 点 D を

$$\overrightarrow{OD} = 4\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$$

で定める。点 X, P, Q, R を以下の条件 (*) を満たすようにとる。

$$(*) \quad \begin{cases} X \text{ は, } \triangle ABC \text{ の辺上または内部にある。} \\ \text{直線 } DX \text{ は, 平面 OAB, 平面 OBC, 平面 OCA とそれぞれ P, Q, R で交わる。} \\ \overrightarrow{DP} = \alpha \overrightarrow{DX}, \overrightarrow{DQ} = \beta \overrightarrow{DX}, \overrightarrow{DR} = \gamma \overrightarrow{DX} \text{ と表すとき, } 0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma \text{ である。} \end{cases}$$

また, 実数 s, t を用いて, $\overrightarrow{AX} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ と表す。次の問いに答えよ。

- (1) 実数 u で定まるベクトル $\overrightarrow{OD} + u\overrightarrow{DX}$ を, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, s, t, u$ を用いて表せ。
- (2) α, β, γ を s, t でそれぞれ表せ。
- (3) X が条件 (*) を満たしながら動くとき, 点 (s, t) の存在範囲を st 平面上に図示せよ。
- (4) X が条件 (*) を満たしながら動くとき, X が動く部分の面積 S_1 と $\triangle ABC$ の面積 S_2 の比 $S_1 : S_2$ を求めよ。

