

A 1

数 学

(2022 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 r を 0 でない実数とする。数列 $\{a_n\}$ が以下をみたしている。

$$\begin{cases} a_1 = r \\ a_n = n - 1 + r + \frac{1}{r}(a_{n-1} - n + 2), \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

(1) a_2, a_3, a_4 を r の式で表せ。

(2) a_n を n, r の式で表せ。

(3) $r = \frac{1}{2}$ のとき, $\sum_{k=1}^n a_k$ を n の式で表せ。

2 正の実数 a, b に対して、関数 $f(x), g(x)$ を

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{3} - a(a+1)x \\ g(x) = \frac{x^2}{2} + b \end{cases}$$

とする。 xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ の共有点は、異なる 2 点のみである。これらの共有点の x 座標を p, q ($p < q$) とおく。次の問いに答えよ。

(1) b を a の式で表せ。

(2) p と q をそれぞれ a の式で表せ。

(3) t が $p \leq t \leq q$ の範囲を動くとき、 $|f(t) - g(t)|$ の最大値を a の式で表せ。

3 1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える。点 P, Q, R は、それぞれ辺 OA, OB, BC を以下のように内分する。

$$OP : PA = s : (1 - s), \quad OQ : QB = t : (1 - t), \quad BR : RC = u : (1 - u)$$

さらに、点 O, $\triangle ABC$ の重心 G, $\triangle PQR$ の重心 H の 3 点は同一直線上にある。

次の問いに答えよ。

(1) s, u を t の式で表せ。また s のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{QP}|^2, |\overrightarrow{QR}|^2$, 内積 $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$ を t の式で表せ。

(3) $\triangle PQR$ の面積 S を t の式で表せ。また S が最小となる t の値を求めよ。

