A 1

数　　学

（2012 年度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には，問題 1, 2, 3 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1 xy 平面上に n 個の点 $\mathrm{P}_k\,(x_k,\ y_k)$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ がある。

$$a = \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad b = \sum_{k=1}^{n} y_k^2, \quad c = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

とおく。さらに，P_k と直線 $\ell : x\cos\theta - y\sin\theta = 0$ の距離を d_k とし，

$$L = \sum_{k=1}^{n} d_k^2$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1) L を a，b，c，θ を用いて表せ。

(2) θ が $0 \leqq \theta < \pi$ の範囲を動くとき，L の最大値と最小値を a，b，c を用いて表せ。

(3) $a \neq b$ または $c \neq 0$ のとき，L を最大にする ℓ を ℓ_1，最小にする ℓ を ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 は直交することを示せ。

2 次の問いに答えよ。

(1) k を 0 以上の整数とするとき,

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2} \leqq k$$

を満たす 0 以上の整数 x, y の組 $(x,\ y)$ の個数を a_k とする。a_k を k の式で表せ。

(2) n を 0 以上の整数とするとき,

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+z \leqq n$$

を満たす 0 以上の整数 x, y, z の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を b_n とする。b_n を n の式で表せ。

3 xy 平面上に曲線 $C : y = \dfrac{1}{2}x^2$ がある。C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$（$t \neq 1$）における接線を，P を中心として反時計回りに 45° 回転して得られる直線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) C と ℓ で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) $S(t)$ を最小にする t の値を求めよ。