A 1

数　　学

（2008 年度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には，問題 1, 2, 3 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1 xy 平面上に 3 つの曲線

$$C_1 : y = x^2$$
$$C_2 : y = 2(x-1)^2 + 3$$
$$C_3 : y = -(x-a)^2 + b \quad (a,\ b \text{ は実数})$$

がある。C_2 と C_3 はただ 1 つの点を共有している。次の問いに答えよ。

(1) C_1，C_2 は共有点をもたないことを示せ。

(2) b を a の式で表せ。

(3) C_1 と C_3 で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a を求めよ。

2 原点を O とする xy 平面上に，2 直線

$$\ell_1 : y = mx$$

$$\ell_2 : y = -mx$$

がある。ただし，$m > 1$ とする。ℓ_1 上に点 $\mathrm{P}\,(s,\ ms)$，ℓ_2 上に点 $\mathrm{Q}\,(t,\ -mt)$ を $s \neq 0$，$t \neq 0$ となるようにとる。P を通り ℓ_1 に垂直な直線と，Q を通り ℓ_2 に垂直な直線の交点を R とする。次の問いに答えよ。

(1) R の座標を求めよ。

(2) PQ と OR が平行となるように P，Q を動かすとき，R の軌跡を求めよ。

3 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = 1 - a_n^2 \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1) $0 < a_{2n-1} \leqq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{4} \leqq a_{2n} < 1$ $(n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$ であることを示せ。

(2) x が $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとき，関数 $f(x) = 2x - x^3$ のとる値の範囲を求めよ。

(3) $\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} \leqq \dfrac{7}{8}$ $(n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$ であることを示せ。