

入学試験過去問題

数 学

横浜国立大学（文系）

対象年度：2004年

試験時間：90分

問題数：3問

第 1 問

次の不等式を証明せよ。

(1) $x > 0, y > 0$ のとき,

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

(2) $x > 1, y > 1$ のとき,

$$\left(\log_{10} \frac{x+y}{2}\right)^2 \geq \log_{10} x \cdot \log_{10} y$$

(3) $x > 1$ のとき,

$$\log_x(1+x) > \log_{1+x}(2+x)$$

第 2 問

座標平面上で、原点 O と異なる点 $P(x, y)$ に対し、 O を端点とする半直線 OP 上に点 $Q(X, Y)$ を $OP \cdot OQ = 4$ が成り立つようにとるものとする。

(1) X, Y を x, y で表せ。

(2) P が

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

で表される領域を動くとき、 Q の存在する範囲を D とする。 D を不等式で表せ。

(3) (2) で求めた範囲 D を図示し、その面積を求めよ。

第 3 問

$\alpha, \beta, \theta, u, v$ は角であり, α, β は $0^\circ < \beta - \alpha < 180^\circ$ を満たす。ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}, \vec{q}$ を次のように定める。

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\cos \alpha, \sin \alpha), & \vec{b} &= (\cos \beta, \sin \beta), \\ \vec{c} &= (\cos \theta, \sin \theta), & \vec{p} &= (\cos u, \sin u), \\ \vec{q} &= (\cos v, \sin v)\end{aligned}$$

- (1) $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ を満たす実数 s, t を α, β, θ で表せ。
- (2) $\vec{p}$ が $\vec{a} \cdot \vec{p} \leq 0, \vec{b} \cdot \vec{p} \leq 0$ を満たすとき, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ の範囲のすべての θ に対して, $\vec{c} \cdot \vec{p} \leq 0$ が成り立つことを示せ。
- (3) $\alpha \leq \theta \leq \beta$ の範囲のすべての θ に対して, $\vec{c} \cdot \vec{p} \leq 0$ が成り立つような u の範囲を求めよ。
- (4) (3) で求めた範囲のすべての u に対して, $\vec{p} \cdot \vec{q} \leq 0$ が成り立つような v の範囲を求めよ。