A 1

数　　学

（2004 年度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には，問題 1, 2, 3 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の不等式を証明せよ。

(1) $x > 0,\ y > 0$ のとき,

$$\frac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}$$

(2) $x > 1,\ y > 1$ のとき,

$$\left(\log_{10} \frac{x+y}{2}\right)^2 \geqq \log_{10} x \cdot \log_{10} y$$

(3) $x > 1$ のとき,

$$\log_x(1+x) > \log_{1+x}(2+x)$$

2 座標平面上で，原点 O と異なる点 P $(x,\ y)$ に対し，O を端点とする半直線 OP 上に点 Q $(X,\ Y)$ を $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=4$ が成り立つようにとるものとする。

(1) X，Y を x，y で表せ。

(2) P が

$$\begin{cases} x+y \geqq 2 \\ x^2+y^2 \leqq 4 \end{cases}$$

で表される領域を動くとき，Q の存在する範囲を D とする。D を不等式で表せ。

(3) (2) で求めた範囲 D を図示し，その面積を求めよ。

3 α，β，θ，u，v は角であり，α，β は $0^\circ < \beta - \alpha < 180^\circ$ を満たす。ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{p}$，$\overrightarrow{q}$ を次のように定める。

$$\overrightarrow{a} = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)\,, \quad \overrightarrow{b} = (\cos\beta,\ \sin\beta)\,,$$
$$\overrightarrow{c} = (\cos\theta,\ \sin\theta)\,, \quad \overrightarrow{p} = (\cos u,\ \sin u)\,,$$
$$\overrightarrow{q} = (\cos v,\ \sin v)$$

(1) $\overrightarrow{c} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$ を満たす実数 s，t を α，β，θ で表せ。

(2) $\overrightarrow{p}$ が $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p} \leqq 0$，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{p} \leqq 0$ を満たすとき，$\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ の範囲のすべての θ に対して，$\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{p} \leqq 0$ が成り立つことを示せ。

(3) $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ の範囲のすべての θ に対して，$\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{p} \leqq 0$ が成り立つような u の範囲を求めよ。

(4) (3) で求めた範囲のすべての u に対して，$\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q} \leqq 0$ が成り立つような v の範囲を求めよ。