A 1

数　　学

（2002 年度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆または黒シャープペンシルを使用しなさい。
3. 氏名および受験番号を解答用紙の所定の記入欄に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には，問題 1, 2, 3, 4 があります。全ての問題に解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は必ず解答用紙の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1

(1) 方程式

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 3x} = 3$$

の $0^\circ \leqq x \leqq 135^\circ$ における解の個数を求めよ。

(2) x，y，z は 1 と異なる正の数で，次の条件を満たしている。

$$\log_y z + \log_z x + \log_x y = \frac{7}{2}$$
$$\log_z y + \log_x z + \log_y x = \frac{7}{2}$$
$$xyz = 2^{10}$$
$$x \leqq y \leqq z$$

x，y，z を求めよ。

2 0 以上の整数 m，n に対し，

$$a_{m,n} = \frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$$

とする。ただし，$0! = 1$ である。次の問いに答えよ。

(1) $a_{m,n+1} + a_{m+1,n} = 4a_{m,n}$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $a_{m,n}$ は整数であることを証明せよ。必要ならば組合せの数 ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!\,(p-q)!}$ が整数であることを用いてもよい。

3 △ABC において

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = x, \quad \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}} = y, \quad \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = z$$

とおく。ここで · は内積を表す。次の問いに答えよ。

(1) 各辺の長さをそれぞれ x，y，z を用いて表せ。

(2) $xy + yz + zx > 0$ が成り立つことを証明せよ。

4 xy 平面上に点 $(a,\ 2)$ を中心とし，原点 O を通る円 C がある。C が放物線 $y = x^2$ と異なる 4 点で交わるとき，次の問いに答えよ。

(1) a の満たす条件を求めよ。

(2) a が (1) で求めた条件を満たしながら変化するとき，C の動く範囲を図示せよ。